

LEONARDO BARTALINI BARUFFALDI

PROJETO DE SISTEMA DE FRENAGEM CONTROLADA PARA  
VEÍCULOS AUTOMOTORES DE QUATRO RODAS

São Paulo  
2008

LEONARDO BARTALINI BARUFFALDI

PROJETO DE SISTEMA DE FRENAGEM CONTROLADA PARA  
VEÍCULOS AUTOMOTORES DE QUATRO RODAS

Relatório apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para a obtenção do título de Bacharel em  
Engenharia Mecânica

São Paulo  
2008

LEONARDO BARTALINI BARUFFALDI

PROJETO DE SISTEMA DE FRENAGEM CONTROLADA PARA  
VEÍCULOS AUTOMOTORES DE QUATRO RODAS

Relatório apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para a obtenção do título de Bacharel em  
Engenharia Mecânica

Área de concentração: Engenharia  
Automotiva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Augusto  
Leal Alves

São Paulo  
2008

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Baruffaldi, Leonardo Bartalini**

**Projeto de frenagem controlada para veículos automotores de quatro rodas / L.B. Baruffaldi. -- São Paulo, 2008.  
63 p.**

**Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.**

**1.Engenharia automotiva I.Universidade de São Paulo.  
Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.**

## DEDICATÓRIA

A Tathi, por roubar meu coração.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Marcelo Augusto Leal Alves pela orientação e apoio ao longo deste trabalho e das atividades desenvolvidas no Baja.

Ao professor Roberto Ramos Júnior pelo exemplo e esforço em apoiar o desenvolvimento das atividades acadêmicas extracurriculares na Escola Politécnica, em particular o projeto Baja SAE.

Ao professor Agenor de Toledo Fleury pelo entusiasmo e pelas conversas sobre modelos e controles automotivos.

A todos os colegas da Equipe Poli de Baja SAE, especialmente a Renan Destéfani Monteiro e Ivan Miguel Trindade, pelas noites passadas em claro, pelas competições, pelas conquistas e pelas derrotas.

Aos meus pais, por toda a dedicação, carinho, esforço, atenção. Por ser meu maior exemplo.

Dans les champs de l'observation, le  
hasard ne favorise que les esprits  
préparés.

(Louis Pasteur)

## RESUMO

O principal objetivo deste texto é o desenvolvimento de um sistema de controle da dinâmica lateral de um veículo automotor por meio do acionamento seletivo dos freios de roda. Para tanto, buscou-se compreender os fenômenos que ocorrem quando um veículo executa uma curva da maneira mais simples e abrangente possível. Um controlador linear foi projetado e inserido na dinâmica do sistema com vistas a conformar a resposta dinâmica e minimizar o risco de acidentes pela perda de controle do veículo. Testou-se a eficiência desse controlador em situações não-lineares por meio de co-simulações entre programas de sistemas multicorpos (MSC.Adams) e programas adequados para o projeto de sistemas de controle (Matlab/Simulink).

Palavras-chave: Engenharia. Engenharia automotiva. Dinâmica veicular. Controle. Sistemas multicorpos.

## ABSTRACT

This work seeks the development of a control system for the lateral dynamics of a automotive vehicle. This control is made by the selective action of the four wheel brakes. To achieve this goal, a simple yet representative model of a curving car was assembled, helping the comprehension of the concerning phenomena. Then, a linear controller was designed and inserted on the original system dynamics, improving its response in hazardous situation. To prove the controller performance in non-linear situations, a multibody model of a sample vehicle was built in MSC.Adams and co-simulated with the control system that was born in Matlab/Simulink.

Keywords: Engineering. Automotive engineering. Control. Multibody systems.

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                      |                                                            |
|----------------------|------------------------------------------------------------|
| $\tilde{\mathbf{x}}$ | Estimativa para um vetor                                   |
| $A$                  | Matriz dinâmica                                            |
| $a_1$                | Distância do centro de massa ao eixo dianteiro             |
| $a_2$                | Distância do centro de massa ao eixo traseiro              |
| $A_x$                | Área frontal equivalente                                   |
| $b$                  | Rigidez longitudinal do pneu                               |
| $B$                  | Matriz de entradas                                         |
| $b_1$                | Bitola esquerda                                            |
| $b_2$                | Bitola direita                                             |
| $C$                  | Matriz de observações                                      |
| $c_1$                | Coeficiente de amortecimento dianteiro                     |
| $c_2$                | Coeficiente de amortecimento traseiro                      |
| $c_{s,1}$            | Coeficiente de rigidez lateral combinada do eixo dianteiro |
| $c_{s,2}$            | Coeficiente de rigidez lateral combinada do eixo traseiro  |
| $C_x$                | Coeficiente longitudinal de arrasto aerodinâmico           |
| $C_y$                | Coeficiente lateral de arrasto aerodinâmico                |
| $C_\alpha$           | Coeficiente de rigidez lateral do pneu                     |
| $D$                  | Força de arrasto aerodinâmico                              |
| $E_c$                | Energia cinética                                           |
| $f_0$                | Coeficiente de resistência ao rolamento                    |
| $F_x$                | Força longitudinal                                         |
| $F_y$                | Força lateral                                              |
| $F_z$                | Força vertical                                             |
| $g$                  | Aceleração do campo gravitacional                          |
| $h$                  | Altura do centro de massa                                  |
| $I_x$                | Momento de inércia de rolagem                              |
| $I_y$                | Momento de inércia de arfagem                              |
| $I_z$                | Momento de inércia de guinada                              |
| $K$                  | Gradiente de sobesterçamento                               |
| $k$                  | Coeficiente de força longitudinal, rigidez linear de mola  |
| $L$                  | Entre-eixos                                                |
| $m$                  | Massa                                                      |
| $m_{ns}$             | Massa não suspensa                                         |

|       |                               |
|-------|-------------------------------|
| $m_s$ | Massa suspensa                |
| $M_z$ | Momento auto-alinhante        |
| $q_i$ | Coordenada generalizada       |
| $Q_i$ | Força generalizada            |
| $r$   | Velocidade angular de guinada |
| $s_x$ | Escorregamento longitudinal   |
| $s_y$ | Escorregamento                |
| $T$   | Energia cinética              |
| $T_1$ | Torque no eixo dianteiro      |
| $T_2$ | Torque no eixo traseiro       |
| $U$   | Energia potencial             |
| $u$   | Velocidade longitudinal       |
| $v$   | Velocidade lateral            |
| $x_i$ | Variável de estado            |

#### Símbolos gregos

|          |                                             |
|----------|---------------------------------------------|
| $\alpha$ | Ângulo de deriva                            |
| $\beta$  | Ângulo de escorregamento                    |
| $\delta$ | Ângulo de esterçamento                      |
| $\phi$   | Ângulo de arfagem                           |
| $\theta$ | Ângulo de guinada, posição angular genérica |
| $\rho$   | Densidade do ar                             |
| $\omega$ | Velocidade angular                          |

## SUMÁRIO

|     |                                                                                      |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | INTRODUÇÃO.....                                                                      | 1  |
| 2   | REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA .....                                                        | 5  |
| 2.1 | INTERAÇÃO PNEU-SOLO.....                                                             | 5  |
| 2.2 | TÓPICOS DE DINÂMICA LONGITUDINAL .....                                               | 9  |
| 2.3 | TÓPICOS DE DINÂMICA LATERAL .....                                                    | 11 |
| 3   | MODELOS PARA A DINÂMICA DO VEÍCULO .....                                             | 15 |
| 3.1 | PNEU ROLANDO EM REGIME PERMANENTE.....                                               | 15 |
| 3.2 | MODELO NÃO-LINEAR DA DINÂMICA LONGITUDINAL.....                                      | 20 |
| 3.3 | MODELO NÃO-LINEAR DA DINÂMICA LATERAL .....                                          | 33 |
| 3.4 | MODELO LINEARIZADO DA DINÂMICA LATERAL .....                                         | 38 |
| 4   | PROJETO DO CONTROLE DA DINÂMICA LATERAL .....                                        | 42 |
| 4.1 | ALOCÇÃO DOS PÓLOS .....                                                              | 44 |
| 4.2 | ESTIMATIVA PARA A MEDIDA DA VELOCIDADE LATERAL .....                                 | 48 |
| 5   | PROTÓTIPO VIRTUAL .....                                                              | 52 |
| 6   | DISCUSSÃO.....                                                                       | 59 |
| 7   | CONCLUSÃO .....                                                                      | 61 |
|     | REFERÊNCIAS .....                                                                    | 62 |
|     | APÊNDICE I: LISTAGEM DO PROGRAMA EM MATLAB – MODELO DA<br>DINÂMICA LONGITUDINAL..... | 1  |
|     | FUNÇÃO PARÂMETROS.....                                                               | 2  |
|     | FUNÇÃO ENTRADA .....                                                                 | 3  |
|     | FUNÇÃO EQUAÇÕES.....                                                                 | 4  |

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| APÊNDICE II – LISTAGEM DO PROGRAMA EM MATLAB - MODELO<br>NÃO-LINEAR DA DINÂMICA LATERAL .....   | 5  |
| FUNÇÃO EQUA .....                                                                               | 6  |
| FUNÇÃO PARAM .....                                                                              | 7  |
| APÊNDICE III – LISTAGEM DO PROGRAMA EM MATLAB - MODELO<br>LINEARIZADO DA DINÂMICA LATERAL ..... | 9  |
| FUNÇÃO DALFADX .....                                                                            | 13 |

## 1 INTRODUÇÃO

Segundo Gillespie (1992), o início da era do automóvel se deu em 1769, quando o engenheiro militar Nicholas Joseph Cugnot inventou um veículo movido a vapor com o intuito de agilizar o deslocamento de tropas e suprimentos pelos campos de batalha. Genta (1997) sugere que o desenvolvimento de dispositivos de transporte automotores teve início muito antes, passou por diversas modificações e, especialmente durante o século XIX, tomou a forma atual.

De qualquer maneira, a disciplina de dinâmica veicular como hoje existe e é conhecida surgiu a partir da fabricação do primeiro pneu de borracha por James Boyd Dunlop. A utilização de pneumáticos, em detrimento as antigas rodas sólidas ou cobertas por finas camadas de borracha crua, mudou completamente a forma como os veículos poderiam interagir com o pavimento. Desde então, os pneus sofreram muitas modificações, tanto em composição como em forma construtiva.

Somente nos últimos vinte e cinco anos, com o crescimento da capacidade de processamento dos computadores, foi possível de fato incluir o comportamento real dos pneus nas análises de dinâmica dos veículos. Antes disso, os projetistas baseavam-se no comportamento médio apresentado em bancadas de teste, mas já conheciam aproximadamente as equações que regiam a dinâmica dos pneus automotivos.

Como aponta Rill (2007a), o projeto com base em simulações numéricas tornou-se padrão na indústria. Normalmente, esses “ensaios” computacionais são realizados por meio de técnicas de sistemas multicorpos e, para serem viáveis, requerem modelos matemáticos dos pneus que sejam, ao mesmo tempo, simples (para reduzir o tempo de simulação) e precisos. Desde meados da década de 1990, muitos pesquisadores têm se esforçado para desenvolver esses modelos e, atualmente, apesar de não ser um tema ainda concluído, já se dispõe de ferramentas que descrevem muito adequadamente o comportamento dos veículos reais (especialmente os veículos de passeio).

O desenvolvimento de sistemas de estabilização e segurança veicular surgiu como resultado da consolidação desses novos conhecimentos.

O ABS, lançado em 1978 pela Bosch, foi o primeiro desses sistemas e atua no sistema de freios apenas. O sucesso e longevidade desse mecanismo mostram a

importância que ele assumiu para a indústria automotiva e seus padrões de segurança. Os sistemas ABS comparam as rotações de duas ou mais rodas no veículo e agem em cada um de maneira individual, evitando escorregamento excessivo – que pode levar à perda de controle do veículo.

Mais tarde, como resultado de desenvolvimentos nas pistas de corrida, entraram em uso comercial os sistemas TC (ou de controle de tração), que atuam no módulo de injeção eletrônica e sobre as linhas de freio para evitar a derrapagem dos pneus quando o veículo é acelerado.

A partir de 1995, começaram a ser produzidos na Europa módulos de controle tipo ESP (*electronic stability program*) que fazem uso de conceitos tanto do ABS quanto do TC para controlar a dinâmica lateral do veículo de maneira integrada. O ESP corrige a trajetória do veículo comparando a intenção do motorista (ângulo de esterçamento e velocidade de translação) com o comportamento real (na forma de escorregamentos dos pneus).

Em seu relatório sobre o papel dos sistemas de estabilidade eletrônica na redução de índice de acidentes, Lie (2003) indica que, em estradas molhadas, o sistema diminui em 56% os acidentes em causados por perda de controle longitudinal. Segundo Whitehead (2006), nos EUA, o *National Highway Traffic Safety Administration* divulgou que, em 2003, o ESP reduziu em 64% o número de acidentes fatais.

Na esteira dos desenvolvimentos eletrônicos e das propulsões híbridas, algumas empresas começam a desenvolver sistemas de freio tipo *brake-by-wire*, visando eliminar os componentes hidráulicos. Adotar atuadores totalmente mecatrônicos, em detrimento do tradicional circuito de comando servo-hidráulico traz uma série de vantagens e abre o leque de possibilidades dos projetistas. Além de reduzir o tempo de resposta do sistema a entradas de controle, esses dispositivos eletrônicos permitem maior precisão de comando, reduzem o número de partes móveis do veículo, eliminam a necessidade de linhas de pressão para o fluido e, quando se trata de veículo de propulsão híbrida, podem carregar as baterias, por meio de frenagem regenerativa.

Atualmente, as principais pesquisas nessa direção são conduzidas pela Continental AG. Com a aquisição da VDO, no final de 2007, que já possuía uma

série de protótipos de pinças de freios eletricamente atuadas, a companhia pretende lançar no mercado, em breve, o primeiro sistema de freios eletromecânicos produzido em larga escala para automóveis (pois em conjuntos ferroviários a tecnologia já tem grande aplicação). Duas configurações são anunciadas publicamente: o EMB (*electro-mechanical brake*) e o EWB (*electronic wedge brake*). A principal diferença entre as duas está na maneira de atuação nas pastilhas de freio, como mostra a Figura 1.1.

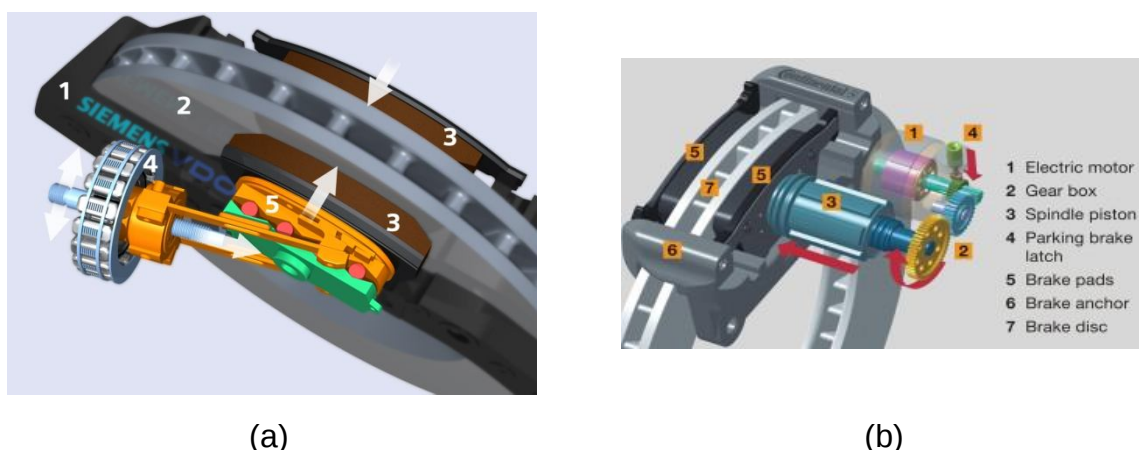


Figura 1.1 – Pinças de freios (a) EWB e (b) EMB.

Segundo dados da própria Continental, disponíveis em seu sítio, testes realizados na neve com pinças EWB reduziram em 15% a distância de frenagem longitudinal.

Apesar de suas vantagens, o desenvolvimento de dispositivos de freio automotivo totalmente eletromecânicos ainda sofre resistência para sua implantação, pois lida com uma área que é crítica para a segurança dos passageiros do veículo. Para desenvolver um sistema desse tipo, dois problemas devem ser enfrentados.

O primeiro envolve a potência necessária para acionar a pinça. Quando de desacelerando de 80 km/h a 0 km/h, um veículo de passeio leve, com cerca de 1200 kg, pode requerer até 350 cv. Para que fosse possível dissipar tal potência com os 12 V disponíveis nas baterias automotivas comuns, seriam necessários motores elétricos especiais, o que elevaria muito o custo.

O outro ponto delicado diz respeito ao projeto de sistemas de controle - tanto do veículo, quanto dos próprios freios – que sejam rápidos e confiáveis. De certo modo, esse problema sempre esteve presente nos controles direcionais de veículos,

pois os pneus apresentam características muito não-lineares e que sofrem influências de perturbações externas muito variadas e incontrolláveis. Não bastando as complicações matemáticas inerentes à modelagem do veículo em si, deve-se levar em conta outro controlador sobre o qual não é possível fazer alterações: o próprio motorista. Cabe ao piloto utilizar seu bom senso e transmitir ao veículo comandos que expressem sua intenção e cabe ao veículo, por meio de suas características de resposta dinâmica, comportar-se de forma a garantir um comportamento adequado.

Partindo das premissas expostas, o presente trabalho tem como foco o desenvolvimento de sistema de controle de frenagem para um veículo automotivo de quatro rodas que compreenda o estado do veículo e atue de forma a re-estabelecer a estabilidade. O resultado final pretendido é que o veículo se comporte de tal forma que, mesmo sem a ação do operador, sua estabilidade direcional seja mantida apenas pela ação do sistema de freios em cada uma das quatro rodas. Em outras palavras, deseja-se que o sistema de controle (e seus atuadores, as pinças) tenha autonomia e robustez suficientes para colocar o carro de volta em sua trajetória pretendida, caso ele, a certa velocidade e em certo raio de curva (mesmo que esse raio seja infinito), comece a perder estabilidade e tenda a girar em torno de seu eixo vertical.

Para elaborar o projeto, foi necessário derivar as equações que regem a dinâmica lateral e longitudinal de um veículo em uma curva de alta velocidade. Para validar e compreender como o controle, projetado de forma independente, altera o comportamento do veículo, utilizou-se um protótipo virtual montado no programa de simulações multicorpos ADAMS/Car.

Este trabalho é apenas parte de um projeto mais amplo, que integra o controle da dinâmica completa do veículo e atua nos freios, na suspensão, na direção e na geração de potência do veículo. As outras partes, compostas pelo controle ativo da geometria de suspensão e da direção são desenvolvidos paralelamente por Renan Destéfani Monteiro e Ivan Miguel Trindade.

## 2 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

### 2.1 INTERAÇÃO PNEU-SOLO

Quando se trata do estudo da dinâmica de um veículo de solo, a utilização de um modelo de pneu adequado é essencial. É através dos pneus que o veículo comunica-se com o pavimento, recebendo e enviando informações que determinam seu comportamento global.

Como aponta Rill (2007), em qualquer ponto de contato entre o pneu e a superfície, forças normais e de atrito são geradas. Essas forças são resultado da aderência ou do escorregamento de regiões específicas da área de contato (Figura 2.1).

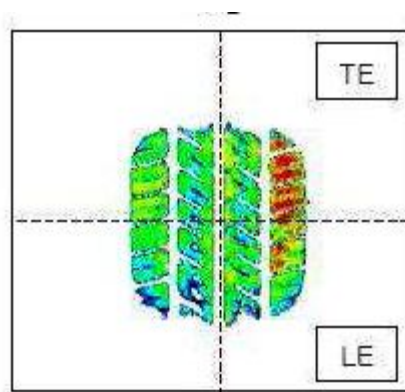


Figura 2.1 – Impressão da área de contato de um pneu, mostrando as diferentes zonas de pressão.

Os esforços gerados nessa região podem ser descritos por um sistema de coordenadas tal que o eixo  $z$  é normal à pista, o eixo  $x$  é perpendicular a  $z$  e ao versor de rotação da roda e  $y$  termina de formar a base positiva. A norma SAE J670e define esse sistema de coordenadas de maneira semelhante, porém com o eixo  $z$  apontando para baixo (GILLESPIE, 1992). Ao longo deste texto, porém, a primeira definição será adotada, pois é a utilizada por grande parte dos autores que tratam da modelagem do veículo no espaço de estados (GENTA, 1997; RILL, 2007; PACEJKA, 2006).

A Figura 2.2 mostra os possíveis esforços que agem sobre um pneu:

- $F_x$  força longitudinal
- $F_y$  força lateral
- $F_z$  força vertical ou normal
- $M_x$  torque de capotamento

$M_y$  torque de resistência ao rolamento

$M_z$  torque auto-alinhante

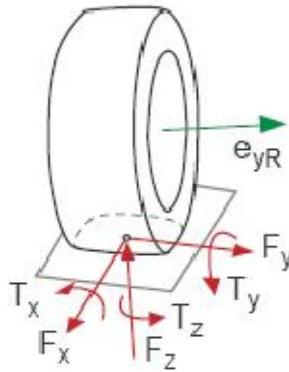


Figura 2.2 – Forças e momentos agindo sobre o pneu (adaptado de Rill ,2007).

O comportamento das forças e momentos de atrito ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ) depende de muitos fatores, mas, em geral, para um dado pavimento, pode ser modelado como uma função da carga na roda,  $F_z$ , e de um escorregamento (diferença normalizada de velocidades) na direção da coordenada generalizada pertinente,  $s_i$ . De fato, os sistemas de controle veicular são projetados, normalmente, com base nessas funções  $f=f(F_z, s_i)$  e as outras influências (perfil de pista, qualidade do pavimento, temperatura) são consideradas perturbações ao sistema.

De fato, um dos modelos matemáticos de pneu mais utilizados, o da fórmula mágica, desenvolvido por Pacejka no início da década de 90, é baseado na utilização de polinômios para interpolar as curvas das propriedades com o uso de um número razoavelmente pequeno de valores empíricos.

Apesar de apresentarem formatos diferentes para cada esforço, as curvas  $f(F_z, s_i)$  são constituídas por três regiões distintas: de adesão, de transição e de atrito (ou de deslizamento), como ilustra a Figura 2.3.

Em condições normais de aceleração e curva, o pneu não costuma sair muito da região de adesão, que é aproximadamente linear e pode ser caracterizada pela inclinação inicial do gráfico:

$$C_i = \left. \frac{df(F_z, s_i)}{ds_i} \right|_{s_i=0} \quad (1)$$

Quando a roda está freando, a região linear costuma ser superada e as forças geradas aproximam-se do valor de pico, que ocorre na região de transição. O propósito dos controles ABS é manter o pneu trabalhando nessa região, de forma a transmitir para o solo toda a potência de frenagem possível, reduzindo a distância percorrida para se parar o veículo. Em carros de competição, os projetistas concentram os esforços em manter o pneu na região de transição também durante a aceleração e curvas, aproveitando ao máximo a capacidade de aderência.

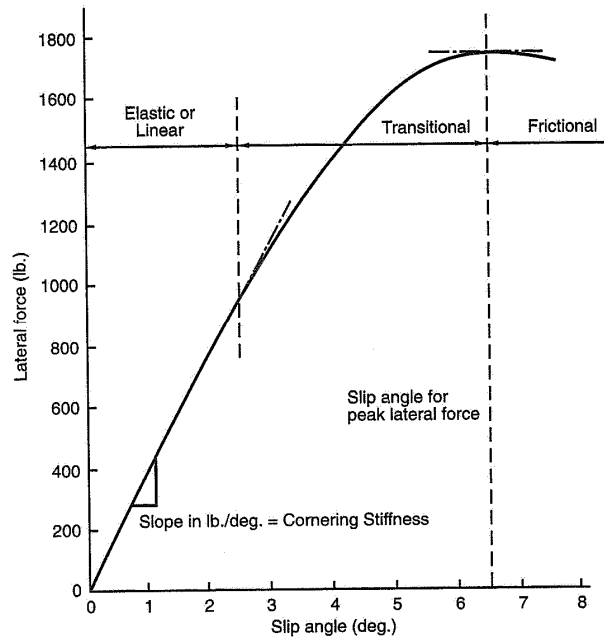


Figura 2.3 – Diagrama de força lateral ( $F_y$ ) em função do escorregamento ( $\alpha$ ), mostrando as fases de contato.

Trabalhar na região de transição, porém, envolve um grande risco: após passar pela força de pico, as forças começam novamente a diminuir com o aumento do escorregamento, o que pode levar a uma situação de deslizamento descontrolado.

Do ponto de vista matemático, a região de transição pode ser modelada como:

$$F_i = F_z \cdot f(s_i) \quad (2)$$

Onde  $f(s_i)$  pode ser, por exemplo, um polinômio em  $s_i$ . A zona de deslizamento pode ser caracterizada por um valor constante de  $F_i$ , mas, como já foi observado, deve ser evitada, exceto em casos excepcionais.

Em um pneu parado, a distribuição de pressões normais no plano  $x$ - $z$  é simétrica em relação ao eixo  $z$ . Quando a roda gira, o gradiente de pressão se desloca para frente, levando a força vertical resultante nessa direção. Como mostra a Figura 2.4, essa mudança na linha de ação gera um momento que se opõe à rotação imposta à roda e, em velocidades moderadas, esse efeito é o principal componente da força de resistência ao rolamento dos pneus.

Gillespie (1992) modela essa força de resistência como um esforço horizontal, que age no plano do solo no sentido oposto ao eixo  $x$  do veículo. Seguramente, essa hipótese é incorreta, pois implica no aparecimento de um momento que tende a aumentar a velocidade da roda e, conseqüentemente, do veículo. Mesmo assim, outros autores (BOSCH, 2005; GENTA, 1997) costumam usar esse modelo quando a rotação das rodas não é considerada como um grau de liberdade do sistema.

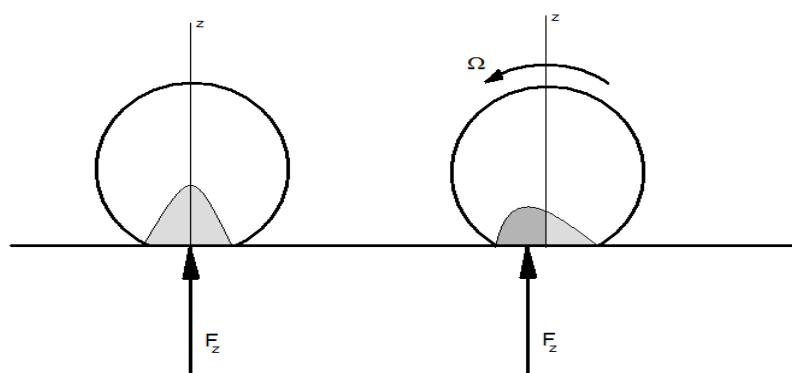


Figura 2.4 – Deslocamento da força vertical.

O mecanismo de geração do torque auto-alinhante é um pouco diferente. Esse esforço só aparece quando o pneu escorrega lateralmente e longitudinalmente ao mesmo tempo, isto é, quando o vetor velocidade de translação não pertence ao plano  $x$ - $z$  e nem ao plano  $y$ - $z$ . As imagens da Figura 2.5 ilustram a geração do momento auto-alinhante e de seu braço, conhecido como *pneumatic trail*. O momento auto-alinhante, bem como a própria força lateral, são influenciados pelo ângulo de cambagem da roda ( $\gamma$ ) e dependem diretamente do escorregamento lateral,  $s_y$ , ou de seu equivalente, o ângulo de deriva do pneu,  $\alpha$ .

É interessante notar que, dependendo da intensidade do escorregamento lateral, o momento auto-alinhante pode mudar de sentido, forçando a roda a virar mais, o que causa perda de estabilidade.

O estudo do comportamento exato de um pneu quando submetido a esforços não simétricos exige modelos muito mais complexos, nos quais os movimentos e esforços laterais não estão desacoplados dos longitudinais. Um pneu que exerce muita força de tração tem menos capacidade de manter-se em curva sem deslizar lateralmente. No entanto, para pequenos ângulos de escorregamento é razoável assumir que essas forças são desacopladas e modelá-las de maneira separada.

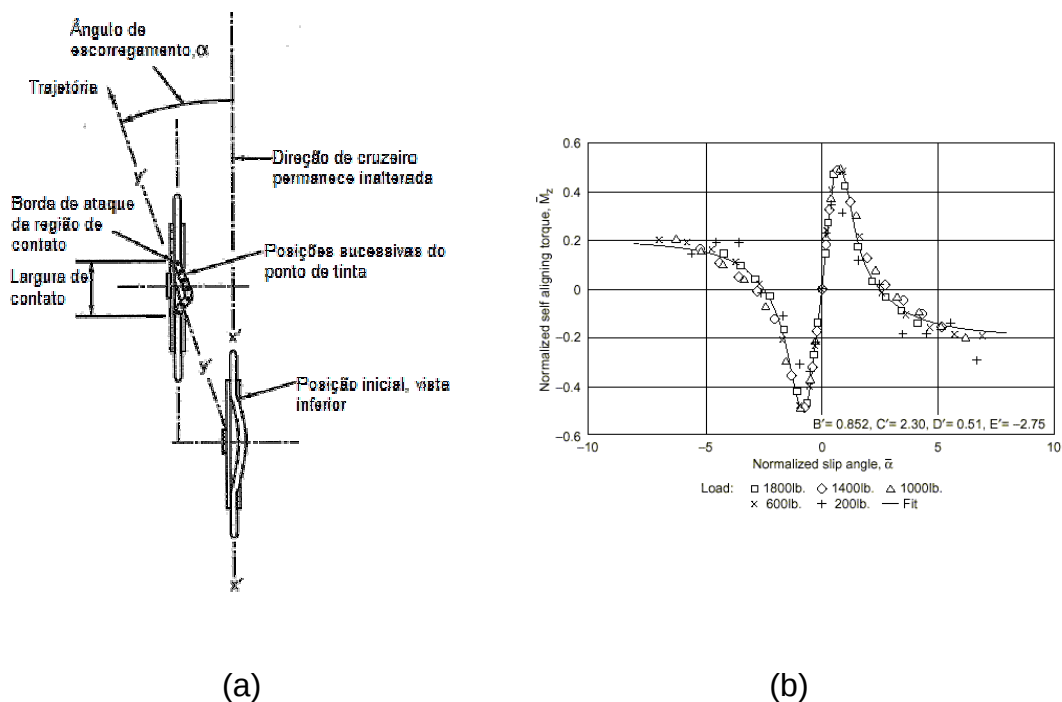


Figura 2.5 – (a) Roda em movimento não simétrico (adaptado de Milliken (1995)) e (b) curva típica de torque auto-alinhante ajustado pelo modelo MF de Pacejka (adaptado de MRA).

## 2.2 TÓPICOS DE DINÂMICA LONGITUDINAL

O modelo mais simples para o estudo do comportamento longitudinal de um veículo de passeio é apresentado na Figura 2.6. Nessa condição, todos os movimentos possíveis do veículo ocorrem sobre seu eixo longitudinal,  $x$ .

Apesar de ser um modelo excessivamente simples (por não considerar os deslocamentos do centro de massa e suas influências sobre a variação das forças normais), essa aproximação clássica é a base para a definição de uma série de termos comuns nas análises de dinâmica veicular e permite a tomada de algumas constatações importantes.

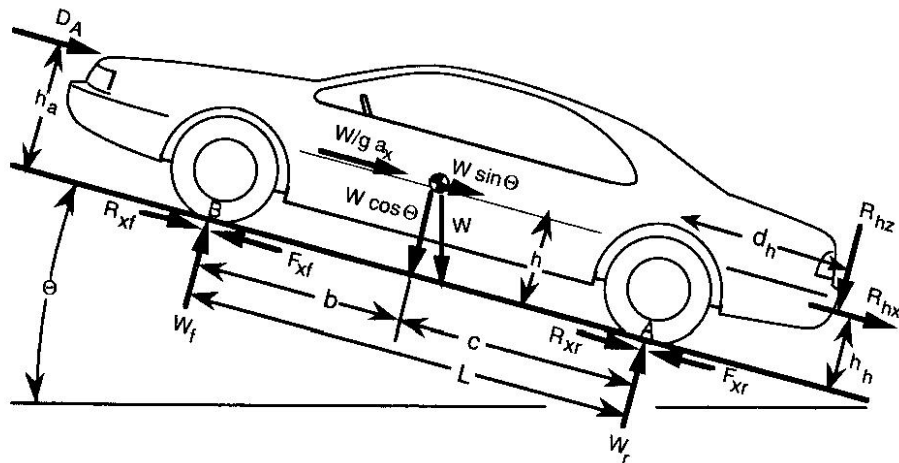


Figura 2.6: Modelo de movimento puramente longitudinal adaptado de Gillespie (1992).

A análise das forças atuando no veículo representado na Figura 2.6 permite concluir que as reações normais do solo são compostas por uma parcela estática, que depende apenas da distribuição de massa do sistema, e por uma série de parcelas que podem depender da aceleração, dos esforços aerodinâmicos e da inclinação do terreno:

$$\begin{aligned}
 F_{z_1} &= \underbrace{\frac{a_2}{a_1 + a_2} mg}_{\text{Normal estática}} - \underbrace{\frac{h}{a_1 + a_2} mg \cdot \text{sen} \alpha}_{\text{Influência da inclinação}} - \underbrace{\frac{h}{a_1 + a_2} m a_x}_{\text{Influência da aceleração}} + \underbrace{\vdots}_{\text{Outras influências}} \\
 F_{z_2} &= \underbrace{\frac{a_1}{a_1 + a_2} mg}_{\text{Normal estática}} + \underbrace{\frac{h}{a_1 + a_2} mg \cdot \text{sen} \alpha}_{\text{Influência da inclinação}} + \underbrace{\frac{h}{a_1 + a_2} m a_x}_{\text{Influência da aceleração}} + \underbrace{\vdots}_{\text{Outras influências}}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Onde:

- $F_z$  força normal
- $a_1$  distância longitudinal do centro de massa ao centro do eixo dianteiro
- $a_2$  distância longitudinal do centro de massa ao centro do eixo traseiro
- $h$  altura estática do centro de massa
- $m$  massa total do veículo
- $g$  aceleração da gravidade
- $a_x$  aceleração longitudinal
- $\alpha$  ângulo de inclinação da rampa

Esse é um resultado especialmente importante, pois é válido mesmo quando são utilizados modelos mais complexos. Como já comentado, as forças verticais exercem influência direta sobre a capacidade dos pneus de produzirem forças

longitudinais, ou  $F_x = k \cdot F_z$  (na região de aderência), onde  $k$  pode depender de uma série de condições de contorno e, portanto, é razoável supor que não é o mesmo para as rodas dianteiras e traseiras. Desprezando todas as formas de resistência, a Segunda Lei de Newton escrita para a direção longitudinal do veículo torna-se:

$$ma_x = k_1 \cdot F_{z_1} + k_2 \cdot F_{z_2} \quad (4)$$

Ou, com a substituição das eq. (3):

$$ma_x = \frac{mg}{a_1 + a_2} (k_1 a_1 + k_2 a_2) - \frac{h}{a_1 + a_2} mg \cdot \sin \alpha \cdot (k_1 - k_2) - \frac{h}{a_1 + a_2} ma_x \cdot (k_1 - k_2) \quad (5)$$

Admitindo  $k$  como constante, é possível isolar  $a_x$  e encontrar solução analítica para a eq. (5). No entanto, sabe-se que  $k$  depende diretamente da diferença entre a velocidade do veículo e a velocidade periférica do pneu, isto é, depende da integral de  $a_x$  e de outra variável. Nesse caso, a dinâmica longitudinal é claramente controlada por uma equação diferencial parcial não linear e que deve receber tratamento numérico para ser resolvida.

## 2.3 TÓPICOS DE DINÂMICA LATERAL

Usualmente, o estudo da dinâmica lateral de um veículo é separado para as situações de baixa velocidade e alta velocidade. As características dinâmicas e de geração de forças nos dois casos são radicalmente diferentes e as suas situações de uso, também.

Nas manobras em baixa velocidade como, por exemplo, em balizas ou estacionamentos, o veículo apresenta muito pouca tendência de perder a estabilidade e as forças laterais geradas pelos pneus são praticamente desprezíveis. Nesse caso, sem dúvida, os ângulos de deriva dos quatro pneus devem tender a zero e essa é a premissa básica do modelo de esterçamento de Ackerman, Figura 2.7. Diz-se que geometria de Ackerman é aquela na qual, para um dado raio de curva, as velocidades de todos os pneus estão alinhadas com seus planos de simetria vertical. Não existem, então, forças laterais.

Note-se que esse é um modelo meramente cinemático, pois, se não existem forças laterais, o veículo não pode executar curvas com raio finito (não existe força centrípeta).

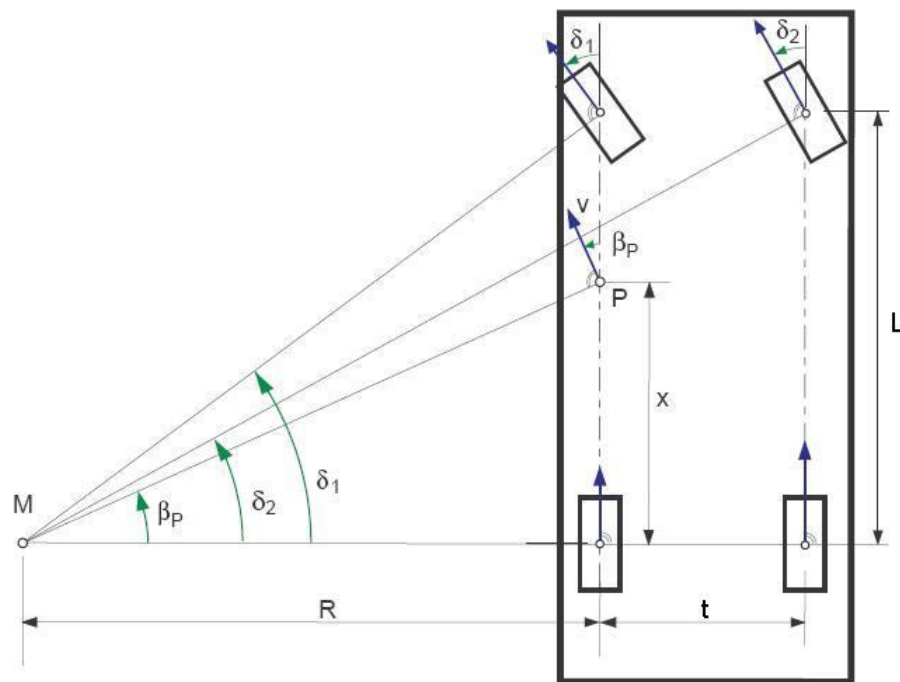


Figura 2.7 – Modelo de Ackerman (adaptado de Rill, 2007a).

Na figura,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  indicam os ângulos de esterçamento das rodas dianteiras e  $\beta_P$  é o ângulo de escorregamento de um ponto qualquer. Como os triângulos indicados sugerem, o ângulo de escorregamento de um ponto é definido como o ângulo formado entre o eixo x do veículo e a velocidade absoluta daquele ponto. Se forem tomados os pontos de contato dos pneus, os ângulos de escorregamento coincidem com os de deriva.

Por semelhança de triângulos, é possível demonstrar que, para que a hipótese de Ackerman seja satisfeita, os ângulos de esterçamento devem ser dados por:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \tan^{-1}\left(\frac{L}{R}\right) \\ \delta_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{L}{R+t}\right)\end{aligned}\tag{6}$$

Com o uso dos sistemas atuais de esterçamento, eminentemente mecânicos, não é possível atingir a geometria de Ackerman em todo o curso da direção, o que explica por que certos veículos emitem um ruído característico quando manobrados em certas condições: são os pneus sendo arrastados com ângulos de deriva elevados.

A aplicação, desde a década de 80, de esterçamento nas quatro rodas corrige esse efeito. No entanto, esses sistemas ainda são muito caros se comparados a mecanismos tradicionais como pinhão cremalheira ou braço de Pitman e isso fornece certa resistência a sua difusão como tecnologia predominante.

No caso de curvas em alta velocidade, o raio costuma ser muitas vezes superior à bitola do veículo, o que sugere a simplificação mais comum utilizada nessa situação: o modelo de bicicleta. Aqui, os ângulos de esterçamento das duas rodas são considerados iguais e não há transferência de carga lateral pelas acelerações, o que torna a aproximação válida apenas para pequenos desvios de uma dada condição de equilíbrio.

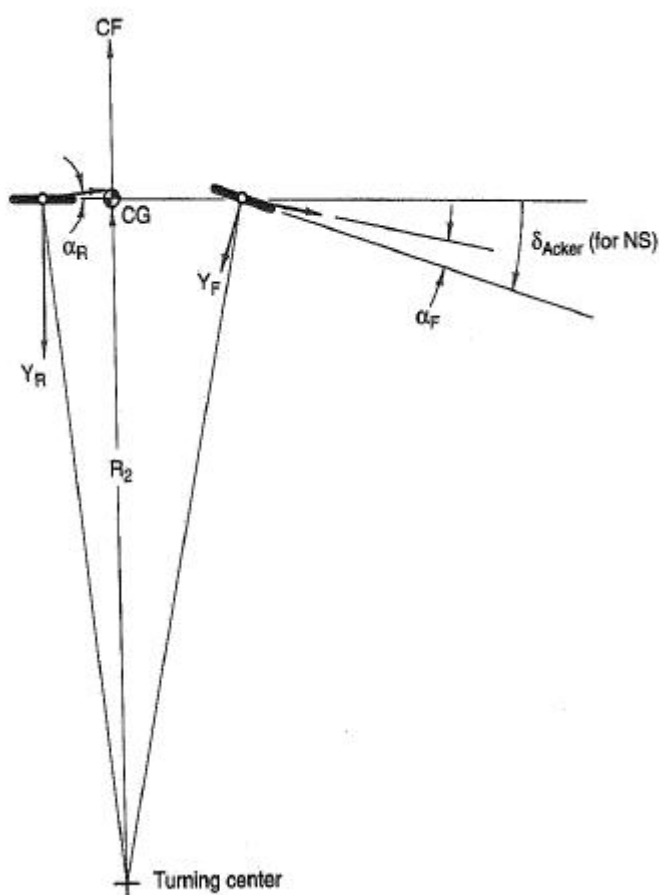


Figura 2.8 – Modelo de bicicleta para veículo executando curva.

Em regime permanente, ou seja, quando o efeito dos amortecimentos já não existe mais, as rodas geram forças contrárias ao raio de curva, mas não alinhadas com este, induzindo ângulos de deriva e de escorregamento não nulos. Isso provoca uma alteração no ângulo ideal de Ackerman,  $\tan^{-1}(L/R)$ , com  $R$  medido no centro de massa.

Essa alteração ocorre devido a uma série de fatores, entre eles as deflexões dos pneus, a configuração da geometria de suspensão e a existência ou não de forças longitudinais nos pneus. O gradiente de sobesterçamento,  $K$ , fornece uma medida simplificada do instante em que o veículo passa a cruzar a fronteira de estabilidade em malha fechada pois os novos ângulos de esterçamento serão dados por:

$$\delta = \frac{L}{R} + K \frac{V^2}{gR} = \frac{L}{R} + K \frac{a_y}{g} \quad (7)$$

O gradiente depende particularmente da distribuição estática de peso e da rigidez lateral dos pneus. Sua expressão completa não será exibida aqui, mas pode ser obtida em diversas referências como Gillespie (1992), Genta (1997), Pacejka (2004) e Rill (2007a).

No texto de Rill (2007a), o gradiente não é derivado explicitamente das equações de movimento, mas aparece no contexto da análise de auto-valores da matriz dinâmica de um sistema linearizado.

Se  $K$  assumir valor nulo, diz-se que o veículo possui comportamento neutro, pois a variação da aceleração lateral não acarreta mudança no ângulo de esterçamento. Com  $K$  positivo, um aumento da aceleração lateral obriga o motorista a aumentar o ângulo de esterçamento para corrigir a trajetória. Com  $K$  negativo, o motorista precisa reduzir o ângulo e, eventualmente, até mesmo contra-esterçar o volante. Para um dado raio, a velocidade em que o ângulo de esterçamento fica nulo é conhecida por velocidade crítica e é dada por:

$$V_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{c_{s_1} c_{s_2} L^2}{m(a_1 c_{s_1} - a_2 c_{s_2})}} \quad (8)$$

A partir dessa velocidade, o veículo passa a ser instável e dificilmente um motorista comum pode controlá-lo novamente.

### 3 MODELOS PARA A DINÂMICA DO VEÍCULO

#### 3.1 PNEU ROLANDO EM REGIME PERMANENTE

Nesta seção, serão desenvolvidas as equações de movimento para um pneu genérico, movendo-se em uma estrada plana com algum ângulo de escorregamento e velocidade  $V$ . O sistema de coordenadas será o mesmo definido na seção anterior e é solidário ao pneu.

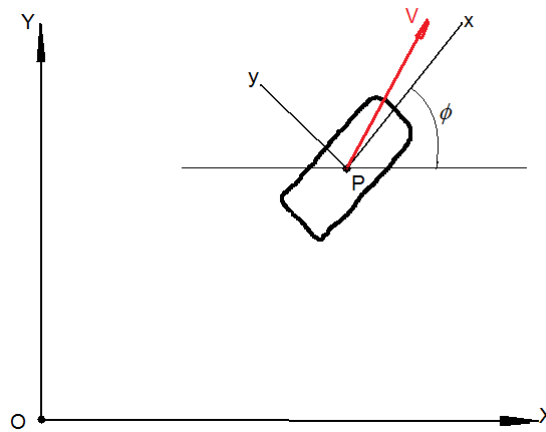


Figura 3.1 – Esquema para o estudo da dinâmica do pneu.

Seja P a origem do sistema de coordenadas xyz e seja O a origem de um segundo referencial XYZ, fixo na terra. Assumindo  $\phi$  como o ângulo entre os eixos  $x$  e  $X$ , uma possível combinação de variáveis que representa o estado do sistema em dado instante de tempo é:

$$\mathbf{x} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}, \dot{\theta}] = [u, v, r, \Omega] \quad (9)$$

Esse vetor ilustra adequadamente os deslocamentos do pneu no plano  $x$ - $y$  e a sua rotação ao redor do eixo da roda. Como aponta Pacejka (2006), as variáveis  $u$  e  $v$  não são exatamente coordenadas, pois são definidas em um referencial não inercial e sua integração não fornece a trajetória em  $xy$ .

A dedução a seguir segue a linha sugerida por Pacejka (2006) e também aplicada em Genta (1997).

Das equações de Lagrange, segue que:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (10)$$

No sistema inercial fixo, as coordenadas  $x$  e  $y$  são expressas por:

$$\begin{aligned} u &= \dot{X} \cos \phi + \dot{Y} \sin \phi \\ v &= -\dot{X} \sin \phi + \dot{Y} \cos \phi \end{aligned} \quad (11)$$

Mas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} &= \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \dot{X}} + \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial T}{\partial u} \cos \phi - \frac{\partial T}{\partial v} \sin \phi \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} &= \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \dot{Y}} + \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \dot{Y}} = \frac{\partial T}{\partial u} \sin \phi + \frac{\partial T}{\partial v} \cos \phi \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{\partial T}{\partial \phi} &= \frac{\partial T}{\partial u} v - \frac{\partial T}{\partial v} u \end{aligned} \quad (12)$$

Combinando-se (12) com (11), chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u} - r \frac{\partial T}{\partial v} &= Q_u \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} + r \frac{\partial T}{\partial u} &= Q_v \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} - v \frac{\partial T}{\partial u} + u \frac{\partial T}{\partial v} &= Q_r \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \Omega} + \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta \end{aligned} \quad (13)$$

As forças generalizadas vêm do teorema do trabalho virtual:

$$\delta W = \sum_{j=1}^4 Q_j \delta q_j = \sum F_x \delta x + \sum F_y \delta y + \sum M_z \delta \phi + \sum T_\theta \delta \theta \quad (14)$$

A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m [u^2 + v^2] + \frac{1}{2} I_z r^2 + \frac{1}{2} I_r \Omega^2 \quad (15)$$

Então, as equações do movimento ficam:

$$\begin{cases} m[\dot{u} - rv] = F_x \\ m[\dot{v} + ru] = F_y \\ I_z \dot{r} = M_z \\ I_r \dot{\Omega} = T_m \end{cases} \quad (16)$$

Isolando as variáveis de estado em (16):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = \frac{F_x}{m} + rv \\ \dot{v} = \frac{F_y}{m} - ru \\ \dot{r} = \frac{M_z}{I_z} \\ \dot{\Omega} = \frac{(T_m - F_x \cdot R)}{I_r} \end{array} \right. \quad (17)$$

Como já foi citado, as forças  $F_x$  e  $F_y$  e o momento auto-alinhante  $M_z$  linearizados podem ser modelados em função da carga sobre o pneu.

$$F_x = k \cdot s_x \cdot F_z - f_0 \cdot F_z \quad (18)$$

$$F_y = C_\alpha \cdot \alpha \cdot F_z \quad (19)$$

$$M_z = C_{Mz} \cdot \alpha \cdot F_z \quad (20)$$

O coeficiente de resistência ao rolamento  $f_0$  varia com a velocidade, mas como o sistema será linearizado em torno de uma condição de equilíbrio, é bastante razoável supô-lo constante.

O escorregamento longitudinal,  $s_x$ , é definido como:

$$s_x = \frac{u - R\Omega}{R\Omega} \quad (21)$$

E o ângulo de deriva,  $\alpha$ , é aproximado por seu seno:

$$\alpha \cong \sin \alpha = \frac{v}{u} \quad (22)$$

Renomeando as variáveis:

$$x_1 = u$$

$$x_2 = v$$

$$x_3 = r$$

$$x_4 = \Omega$$

$$u = T_m$$

Substituindo no sistema (17):

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = \frac{F_z}{m} \left[ \frac{k \cdot (x_1 - R x_4)}{R x_4} - f_0 \right] + x_3 x_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\
 \dot{x}_2 = \frac{c_\alpha \cdot x_2 \cdot F_z}{m x_1} - x_3 x_1 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\
 \dot{x}_3 = \frac{c_{Mz} \cdot x_2 \cdot F_z}{x_1 I_z} = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\
 \dot{x}_4 = \frac{1}{I_r} \left\{ u - F_z \cdot \left[ \frac{k \cdot (x_1 - R x_4)}{x_4} - f_0 \cdot R \right] \right\} = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u)
 \end{cases} \quad (23)$$

Tem-se, então, um sistema de equações não-lineares que descreve o comportamento da roda em movimento plano. A linearização pode ser efetuada em torno de  $\{x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, x_{4_0}, u_0\}$  com a técnica da expansão em séries de Taylor. O sistema pode, então, ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \Delta u \quad (24)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{F_z \cdot k}{m \cdot R \cdot x_{4_0}} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= x_{3_0} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= x_{2_0} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial x_4} &= -\frac{F_z \cdot k \cdot x_{1_0}}{m \cdot R \cdot x_{4_0}^2} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 0
 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{c_\alpha \cdot F_z \cdot x_{2_0}}{m \cdot x_{1_0}^2} - x_{3_0} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{c_\alpha \cdot F_z}{m \cdot x_{1_0}} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= -x_{1_0} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} &= 0 \\
 \frac{\partial f_2}{\partial u} &= 0
 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= -\frac{c_{Mz} \cdot F_z \cdot x_{2_0}}{I_z \cdot x_{1_0}^2} \\
 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= \frac{c_{Mz} \cdot F_z}{I_z \cdot x_{1_0}} \\
 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= 0 \\
 \frac{\partial f_3}{\partial x_4} &= 0 \\
 \frac{\partial f_3}{\partial u} &= 0
 \end{aligned}
 \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= -\frac{F_z \cdot k}{I_r \cdot x_{4_0}} \\
 \frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= 0 \\
 \frac{\partial f_4}{\partial x_3} &= 0 \\
 \frac{\partial f_4}{\partial x_4} &= \frac{F_z \cdot k \cdot x_{0_1}}{I_r \cdot x_{4_0}^2} \\
 \frac{\partial f_4}{\partial u} &= \frac{1}{I_r}
 \end{aligned}
 \quad (28)$$

Para montar o sistema, serão admitidos os seguintes dados numéricos típicos:

$$m = 13 \text{ kg}$$

$$I_r = 1,243 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = 0,555 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c_\alpha = 8,185 \text{ 1/rad}$$

$$c_{Mz} = 0,0509 \text{ m/rad}$$

$$F_z = 4500 \text{ N}$$

$$k = 3,66$$

$$R = 0,350 \text{ m}$$

E os pontos de linearização:

$$x_{1_0} = 10 \text{ m/s}$$

$$x_{2_0} = 0,9 \text{ m/s}$$

$$x_{3_0} = 0 \text{ rad/s}$$

$$x_{4_0} = 25 \text{ rad/s}$$

É interessante notar que esses valores determinam que o sistema esteja linearizado para pontos que possuam escorregamento longitudinal próximos a 20%, ângulo de escorregamento de cerca de 5° e cuja rotação em torno de z não varia muito.

Para essa condição, as matrizes do sistema escrito no espaço de estados ficam:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 144,8 & 0 & 0,9 & -57,9 \\ -25,5 & 288,33 & -10 & 0 \\ -3,714 & 41,3 & 0 & 0 \\ -530 & 0 & 0 & 212 \end{bmatrix}}_A \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,804 \end{bmatrix}}_B \cdot \mathbf{u} \quad (29)$$

O polinômio característico desse sistema é dado por:

$$P = s^4 - 645,13s^3 + 103303,09s^2 - 151139,27s + 7756,41 \quad (30)$$

E as soluções para esse polinômio são apresentadas na Figura 3.2.

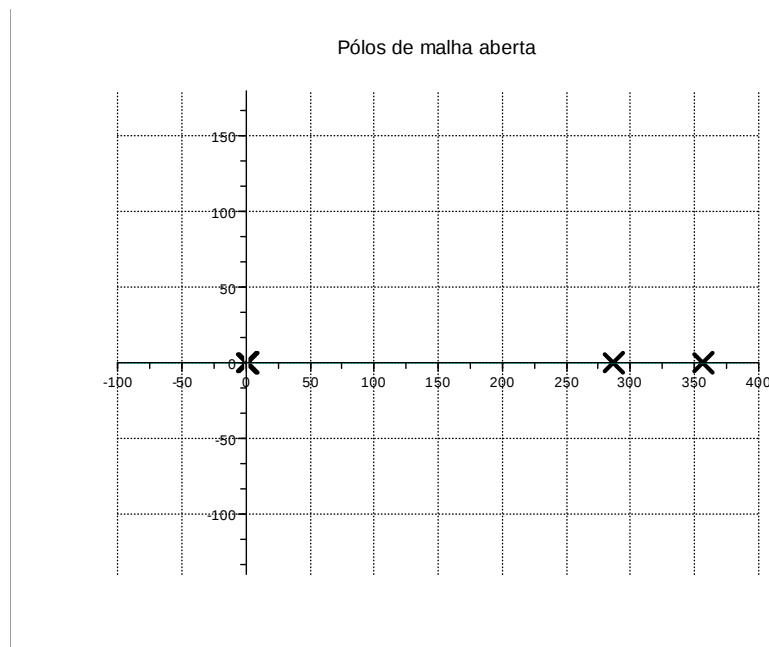


Figura 3.2 – Pólos de malha aberta do sistema

Fica claro que o pneu rolando livremente é um corpo instável. O resultado é perfeitamente razoável, dado que, se há movimentos em  $z$  (curva) e  $y$  (rotação), a conservação do momento angular leva o pneu a ter algum movimento em  $x$  também, o que derrubaria o corpo no chão.

### 3.2 MODELO NÃO-LINEAR DA DINÂMICA LONGITUDINAL

O modelo desenvolvido a seguir é uma derivação daquele apresentado na seção 2.2, mas que leva em consideração a ação da suspensão.

Quando um veículo acelera ou freia, a transferência de peso entre seus eixos causa deflexões na suspensão, dissipando parte da energia. Levar em consideração

esses efeitos implica em adicionar ao modelo pelo menos mais um grau de liberdade, representado pelo ângulo de arfagem da carroceria.

Como indicado pela Figura 3.3, o modelo considerado é composto por 3 corpos rígidos movendo-se ao longo do plano x-z. A carroceria, representada pela massa suspensa,  $m_s$ , pode mover-se tanto longitudinalmente quanto verticalmente, além de poder inclinar-se para frente ou para trás, segundo o ângulo de arfagem  $\phi$ . As duas rodas, que giram em torno de seus eixos ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ) e transladam junto com a carroceria, estão ligadas ao corpo do veículo por um conjunto de molas e amortecedores.

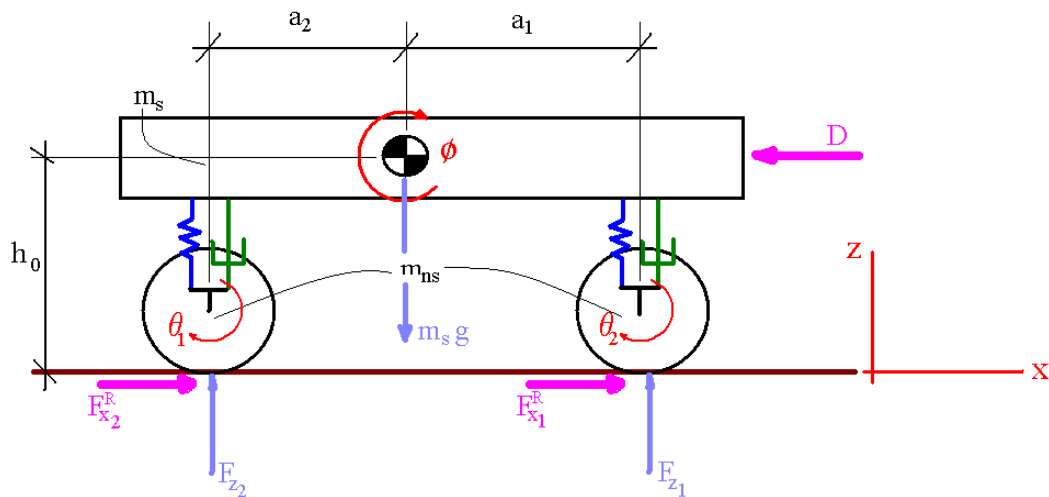


Figura 3.3 - Modelo de dinâmica longitudinal com 5 graus de liberdade.

As hipóteses feitas para o desenvolvimento matemático são apresentadas a seguir:

1. O centro de arfagem coincide com o centro de massa da carroceria;
2. A força de arrasto aerodinâmico,  $D$ , tem linha de ação horizontal que passa pelo centro de massa da carroceria;
3. As molas e os amortecedores são lineares;
4. Os valores de  $\phi$  são pequenos, de forma que a aproximação  $\sin\phi = \phi$  é válida;
5. O veículo não rola, isto é, não apresenta rotação ao redor de  $x$ ;
6. As molas e os amortecedores são fixos na carroceria de tal forma que sua deformação é exclusivamente vertical;
7. O raio dinâmico dos pneus é suposto constante;

8. As deformações dos pneus não afetam o movimento global.

Desenvolvendo o problema, novamente, segundo o formalismo Lagrangeano, a energia cinética do sistema pode ser dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_s + m_{ns}) \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_s \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_y \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w \cdot (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (31)$$

A energia potencial fica:

$$U = m_s g z + \frac{1}{2}k_1 \left[ (a_1 \phi)^2 + z^2 \right] + \frac{1}{2}k_2 \left[ (a_2 \phi)^2 + z^2 \right] \quad (32)$$

O efeito dos amortecedores pode ser avaliado quando se introduz a função de dissipação de Rayleigh,  $R$ , que, nesse caso, é:

$$R = \frac{1}{2}c_1 \left[ (a_1 \dot{\phi})^2 + \dot{z}^2 \right] + \frac{1}{2}c_2 \left[ (a_2 \dot{\phi})^2 + \dot{z}^2 \right] \quad (33)$$

Nas expressões acima, a energia cinética foi representada por  $E_c$  para evitar confusão com os torques aplicados às rodas,  $T_1$  e  $T_2$ .

Como se encontra apresentado em Martins (2006), as equações de movimento podem, então, ser determinadas a partir da forma generalizada das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^* \quad (34)$$

Onde  $Q_i^*$  representa as forças não-conservativas e não-dissipativas que agem na direção da coordenada generalizada  $q_i$ .

As coordenadas generalizadas são:

$$q_1 = x$$

$$q_2 = z$$

$$q_3 = \phi$$

$$q_4 = \theta_1$$

$$q_5 = \theta_2$$

As equações, a partir daqui, serão desenvolvidas de maneira independente para cada coordenada generalizada, para tornar a dedução mais clara.

### 3.2.1 Equação de movimento para a coordenada x

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_s + m_{ns}) \cdot \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_s + m_{ns}) \cdot \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0$$

Então:

$$(m_s + m_{ns}) \cdot \ddot{x} = Q_x^* \quad (35)$$

### 3.2.2 Equação de movimento para a coordenada z

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m_s \cdot \dot{z} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m_s \cdot \ddot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -m_s g - k_1 \cdot z - k_2 \cdot z$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{z}} = c_1 \cdot \dot{z} + c_2 \cdot \dot{z}$$

Então:

$$m_s \cdot \ddot{z} + (c_1 + c_2) \cdot \dot{z} + (k_1 + k_2) \cdot z + m_s g = Q_z^* \quad (36)$$

### 3.2.3 Equação de movimento para a coordenada $\phi$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_y \cdot \dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_y \cdot \ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -k_1 a_1^2 \cdot \phi - k_2 a_2^2 \cdot \phi$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}} = c_1 a_1^2 \cdot \dot{\phi} + c_2 a_2^2 \cdot \dot{\phi}$$

Então:

$$I_y \cdot \ddot{\phi} + (c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2) \cdot \dot{\phi} + (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2) \cdot \phi = Q_\phi^* \quad (37)$$

### 3.2.4 Equação de movimento para as coordenadas $\theta_1$ e $\theta_2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I_w \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = I_y \cdot \ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_1} = 0$$

O mesmo valendo para o segundo eixo. Assim:

$$\begin{aligned} I_w \cdot \ddot{\theta}_1 &= Q_{\theta_1}^* \\ I_w \cdot \ddot{\theta}_2 &= Q_{\theta_2}^* \end{aligned} \quad (38)$$

As eq. ( 35 ), ( 36 ), ( 37 ) e ( 38 ) podem sugerir que o sistema é totalmente desacoplado. Porém, a introdução das forças não-dissipativas irá revelar a relação entre os diferentes graus de liberdade. Rigorosamente falando, essas forças farão o papel das equações restritivas, que relacionam os valores que um determinado grau de liberdade pode assumir com o estado do sistema como um todo. Por exemplo, se fosse feita a hipótese de que a roda move-se sem escorregar, a equação  $r \cdot \dot{\theta} = \dot{x}$  indicaria a relação existente entre a rotação do pneu e a translação do corpo do veículo. Outra forma de expressar essa relação é atrelar a força de aceleração (ou frenagem) ao torque produzido pelas forças horizontais de atrito. Assim, em regime permanente,  $T = r \cdot F_x$ .

### 3.2.5 Forças generalizadas

#### 3.2.5.1 Forças verticais

As primeiras forças a serem tratadas são as forças verticais de reação do solo.

Essas reações variam com a aceleração do corpo do veículo e com o arrasto aerodinâmico,  $D$ :

$$F_{z_1} = \left( \frac{m_{ns}}{2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_s \right) g - \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} (m_s + m_{ns}) \ddot{x} - \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} D \quad (39)$$

$$F_{z_2} = \left( \frac{m_{ns}}{2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2} m_s \right) g + \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} (m_s + m_{ns}) \ddot{x} + \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} D \quad (40)$$

Claramente, a soma dessas duas componentes é igual ao peso total do conjunto, ou  $(m_s + m_{ns}) \cdot g$ . Assim, as forças generalizadas em  $z$  ficam:

$$Q_z^* = (m_s + m_{ns}) \cdot g \quad (41)$$

### 3.2.5.2 Forças longitudinais

Como foi apontado na revisão bibliográfica, se for assumido comportamento linear, a geração de forças longitudinais em um pneu automotivo pode ser expressa por:

$$F_x = b \cdot F_z \cdot s_x \quad (42)$$

A maior parte dos autores, entre eles Rill (2007) e Pacejka (2006) costuma definir esse escorregamento em termos da diferença relativa entre as velocidades periféricas:

$$s_x = \frac{r\dot{\theta} - \dot{x}}{\dot{x}} \quad (43)$$

Essa definição é interessante, pois vale tanto para a aceleração, quanto para a frenagem. No entanto, quando a velocidade em  $x$  tende a zero, a função de escorregamento apresenta uma singularidade numérica, o que impede seu uso computacional. Rill (2007) sugere, então, o uso de uma pequena velocidade de correção, que deve ser adicionada ao denominador.

Usando a eq. (43), então:

$$F_x = b \cdot F_z \cdot \left( \frac{r\dot{\theta} - \dot{x}}{\dot{x}} \right) \quad (44)$$

A força de arrasto aerodinâmico usualmente (GENTA, 1997) é modelada por:

$$D = \frac{1}{2} C_x A_x \dot{x}^2 \quad (45)$$

As forças generalizadas na direção  $x$  são resultado da soma das eq. (44) e (45):

$$Q_x^* = b_1 \cdot F_{z_1} \cdot \left( \frac{r\dot{\theta}_1 - \dot{x}}{\dot{x}} \right) + b_2 \cdot F_{z_2} \cdot \left( \frac{r\dot{\theta}_2 - \dot{x}}{\dot{x}} \right) - \frac{1}{2} C_x A_x \dot{x}^2 \quad (46)$$

Matricialmente, as reações normais podem ser reescritas como:

$$F_z = \begin{bmatrix} \left( \frac{m_{ns}}{2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_s \right) g & -\frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} (m_s + m_{ns}) & -\frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} \\ \left( \frac{m_{ns}}{2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_s \right) g & \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} (m_s + m_{ns}) & \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \ddot{x} \\ D \end{bmatrix} \quad (47)$$

Dessa maneira, a segunda derivada temporal de  $x$  aparecerá multiplicando a primeira derivada, o que dificulta a solução do problema, mesmo numericamente. Uma aproximação razoável que permite eliminar esse efeito é considerar uma aceleração de equilíbrio, ao redor da qual a parcela dinâmica pode ser calculada.

Segundo testes apresentados no sítio Carsale, um compacto médio consegue frear de 100 km/h ao repouso em 53 m. Admitindo que a aceleração durante esse percurso seja constante, ela vale:

$$a_x^{média} = \left[ 0 - \left( \frac{100}{3,6} \right)^2 \right] \frac{1}{2 \cdot 53} \cong 7,3 \text{ m/s}^2$$

Obviamente, essa abordagem tem suas limitações, pois não leva em consideração exatamente a aceleração instantânea. Para estudos gerais, no entanto ela é válida e, com o auxílio de um computador é possível modificá-la dinamicamente com base em uma tendência das acelerações calculadas anteriormente pelo integrador.

Com isso, as eq. (47) pode ser reescrita:

$$F_z = \underbrace{\begin{bmatrix} \left( \frac{m_{ns}}{2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_s \right) g & -\frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} (m_s + m_{ns}) \bar{a}_x & -\frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} \frac{\rho C_x A_x}{2} \\ \left( \frac{m_{ns}}{2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2} m_s \right) g & \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} (m_s + m_{ns}) \bar{a}_x & \frac{h_0 - z}{a_1 + a_2} \frac{\rho C_x A_x}{2} \end{bmatrix}}_{C_{F_z}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

E as forças longitudinais podem ser rearranjadas como:

$$Q_x^* = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 \\ 0 & s_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{F_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \rho C_x A_x \dot{x}^2 \quad (49)$$

### 3.2.5.3 Momentos nas rodas

Para a dinâmica das rodas, surge novamente o problema da modelagem da força de resistência ao rolamento, imposta aos pneus. Como o modelo que está sendo desenvolvido até aqui conta com a rotação das rodas, admitir essa força como totalmente horizontal implicaria na consequência indesejada de aumentar a rotação dos pneus. Referindo-se à Figura 2.4, a resistência ao rolamento será considerada como um deslocamento do ponto de aplicação da força vertical.

Em seu livro, Genta (1997) sugere que a resistência ao rolamento (ainda como força longitudinal) seja modelada como:

$$F_R = F_z \cdot (f_0 + K\dot{x}^2) \quad (50)$$

Com  $f_0$  e  $K$  valendo, respectivamente, 0,08 e  $6,5 \times 10^{-6}$ , para piso rígido. A observação da ordem de grandeza desses fatores, auxiliada pelo gráfico da Figura 3.4, mostra que, para um estudo aproximado, a segunda parcela, dependente da velocidade, pode ser desprezada.

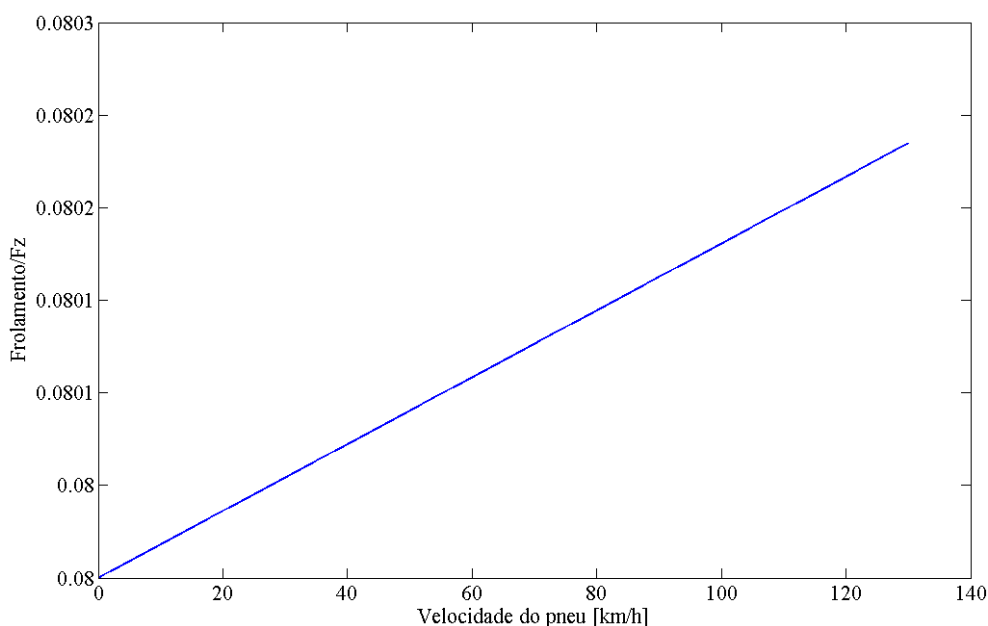


Figura 3.4 – Variação do coeficiente de resistência a rolamento.

O que se pretende achar, agora, é uma relação entre a formulação da força de resistência ao rolamento como esforço longitudinal - que é conhecida e apresentada em várias fontes (GILLESPIE, 1992) (GENTA, 1997) – e a formulação proposta como um deslocamento do ponto de aplicação da normal. Para tanto,

admite-se que os pneus de um veículo qualquer rolam sem escorregar. Quando a aceleração é nula, o equilíbrio de momentos nesse pneu fornece:

$$F_x^{TOTAL} \cdot r = (F_x - F_z f_0) \cdot r = T \quad (51)$$

É preciso encontrar uma relação tal que:

$$F_x \cdot r + F_z \cdot \Delta x = T \quad (52)$$

Igualando as eq. ( 50 ) e ( 51 ), encontra-se:

$$\Delta x = -f_0 r \quad (53)$$

Em outras palavras, deslocar o ponto de aplicação da força em  $f_0 r$  tem o mesmo efeito no movimento do veículo, sem o inconveniente de acelerar a roda no sentido errado (não real).

Dessa maneira, o equilíbrio de momentos em cada roda fica:

$$Q_{\theta_1}^* = T_1 - F_{x_1} - F_{z_1} \cdot f_0 r \quad (54)$$

$$Q_{\theta_2}^* = T_2 - F_{x_2} - F_{z_2} \cdot f_0 r \quad (55)$$

Nos momentos de arfagem, há a ação das normais, bem como das forças longitudinais. Rigorosamente, devido ao tratamento dado à resistência ao rolamento, o braço de ação das normais em relação ao eixo  $y$  deveria vir modificado por  $\Delta F_z$ . No entanto, esse valor é várias vezes menor do que  $a_1$  ou  $a_2$ , e pode, aqui, ser desprezado. Dessa maneira, temos:

$$Q_{\phi}^* = F_{z_2} \cdot a_2 - F_{z_1} \cdot a_1 - (F_{x_1} + F_{x_2}) \cdot (h_0 + z) \quad (56)$$

### 3.2.6 Forma final das equações de movimento

Aplicando as forças generalizadas desenvolvidas acima nas eq. ( 41 ), ( 49 ), ( 54 ), ( 55 ) e ( 56 ) nas equações de movimento, tem-se:

1. Para  $x$ :

$$(m_s + m_{ns}) \cdot \ddot{x} = b_1 \cdot F_{z_1} \cdot \left( \frac{r \dot{\theta}_1 - \dot{x}}{\dot{x}} \right) + b_2 \cdot F_{z_2} \cdot \left( \frac{r \dot{\theta}_2 - \dot{x}}{\dot{x}} \right) - \frac{1}{2} C_x A_x \dot{x}^2 \quad (57)$$

2. Para  $z$ :

$$m_s \cdot \ddot{z} + (c_1 + c_2) \cdot \dot{z} + (k_1 + k_2) \cdot z = m_{ns} \cdot g \quad (58)$$

3. Para  $\phi$ :

$$\begin{aligned} I_y \cdot \ddot{\phi} + (c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2) \cdot \dot{\phi} + (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2) \cdot \phi = \\ = F_{z_2} \cdot a_2 - F_{z_1} \cdot a_1 - (F_{x_1} + F_{x_2}) \cdot (h_0 + z) \end{aligned} \quad (59)$$

4. Para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ :

$$I_w \cdot \ddot{\theta}_1 = T_1 - F_{x_1} r - F_{z_1} \cdot f_0 r \quad (60)$$

$$I_w \cdot \ddot{\theta}_2 = T_2 - F_{x_2} r - F_{z_2} \cdot f_0 r \quad (61)$$

### 3.2.7 Modelo não-linear escrito no espaço de estados

Sejam as seguintes oito variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_1 = x \quad x_3 = z \quad x_5 = \phi \quad x_7 = \dot{\theta}_1 \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \quad x_4 = \dot{x}_3 = \dot{z} \quad x_6 = \dot{x}_5 = \dot{\phi} \quad x_8 = \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

As equações desenvolvidas anteriormente podem ser expressas em função desses 8 estados, dando completa solução ao problema não-linear.

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{Bmatrix} = & \begin{Bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{(m_s + m_{ns})} \left[ \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 \\ 0 & s_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{F_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \rho C_x A_x x_2^2 \right] \\ x_4 \\ \frac{1}{m_s} [m_{ns} g - (c_1 + c_2) \cdot x_4 - (k_1 + k_2) \cdot x_3] \\ x_6 \\ \frac{1}{I_y} \left\{ \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 \\ 0 & s_{x_2} \end{bmatrix} (h_0 + x_3) \right\} \begin{bmatrix} C_{F_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \\ - (c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2) \cdot x_6 - (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2) \cdot x_5 \\ \frac{1}{I_w} \left\{ T_1 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 \\ 0 & s_{x_2} \end{bmatrix} r + f_0 r \right\} \begin{bmatrix} C_{F_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{I_w} \left\{ T_2 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 \\ 0 & s_{x_2} \end{bmatrix} r + f_0 r \right\} \begin{bmatrix} C_{F_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (62)
\end{Bmatrix}$$

O sistema acima foi montado em Matlab R2007a e simulado para uma entrada de torque em forma de degraus escalonados, conforme relações de transmissão de um GM Corsa, apresentadas em Baruffaldi et alii (2008).

### 3.2.8 Discussão do modelo

As figuras a seguir ilustram graficamente os resultados obtidos para as simulações em Matlab. A análise dos gráficos apresentados mostra prontamente algumas inconsistências no modelo.

Em primeiro lugar, a velocidade limite atingida foi de cerca de 80 km/h, quando se sabe que um veículo do porte do modelado pode atingir até cerca de 170 km/h. Isso pode indicar alguma falha nas hipóteses adotadas para as forças trativas ou para as forças de resistência.

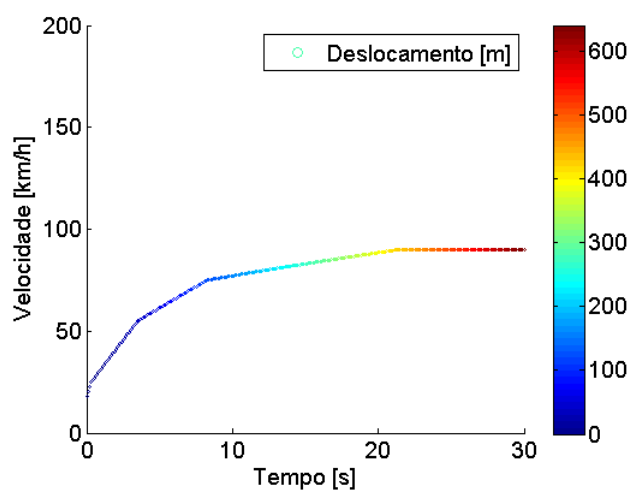


Figura 3.5 – Velocidade longitudinal em função do tempo.

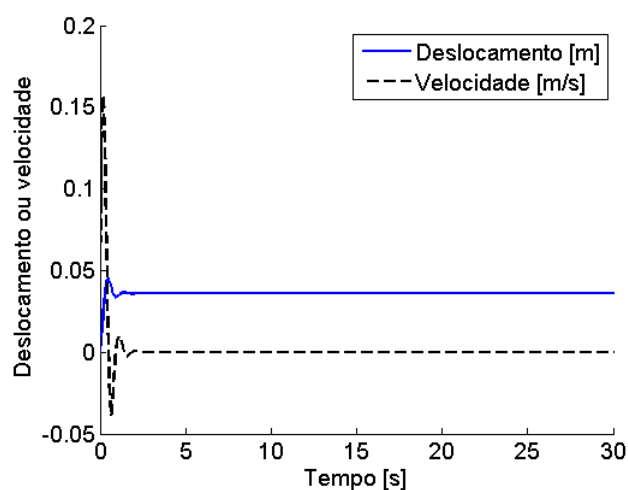


Figura 3.6 – Comportamento vertical em função do tempo.

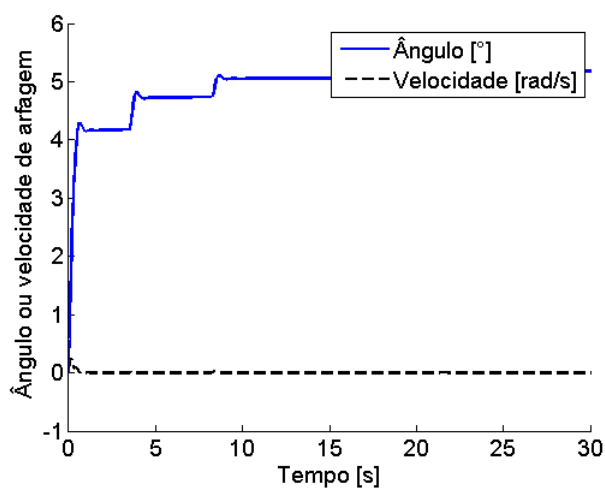


Figura 3.7 – Comportamento de arfagem em função do tempo.

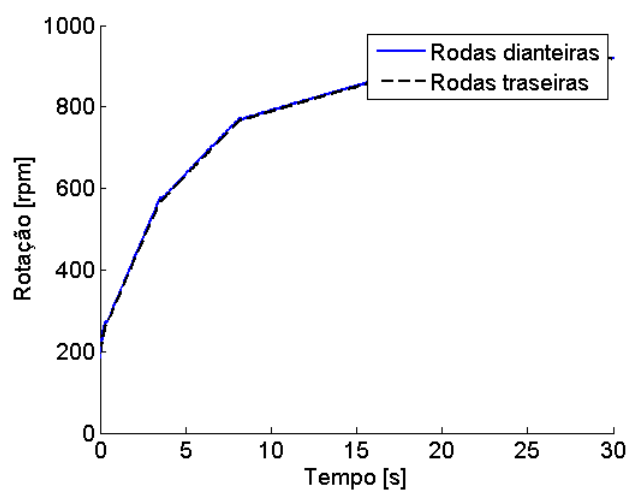


Figura 3.8 – Rotação da rodas em função do tempo.

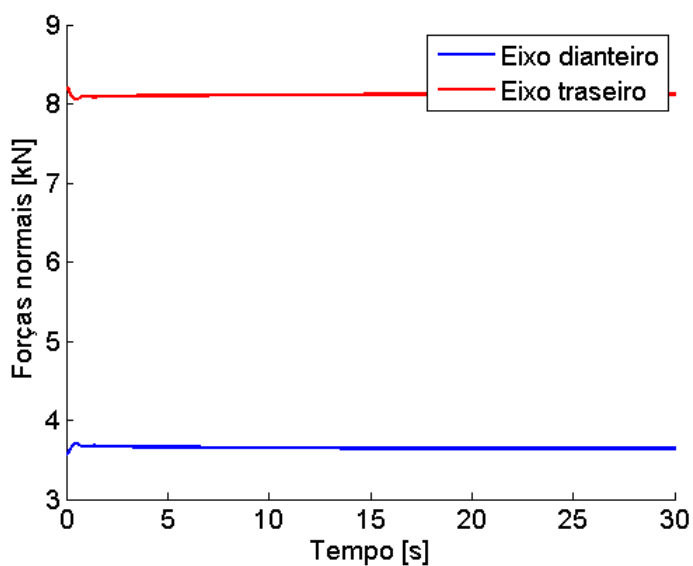


Figura 3.9 – Comportamento das forças normais nos eixos em função do tempo.

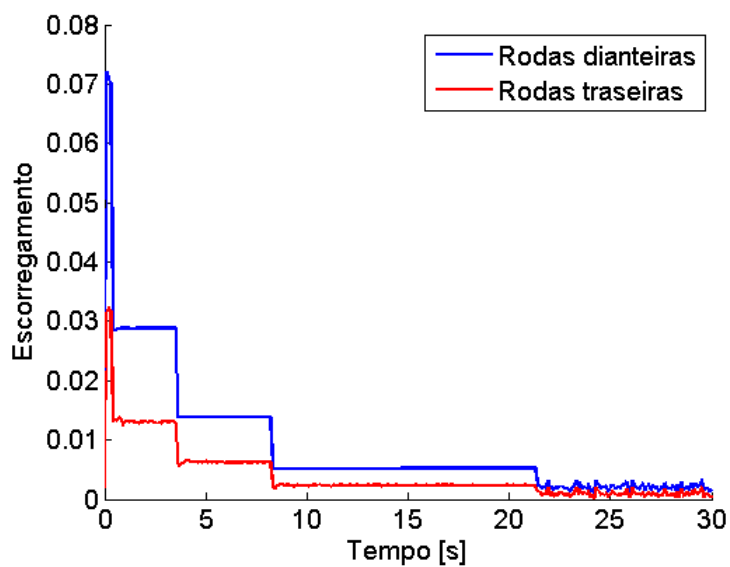


Figura 3.10 – Escorregamento longitudinal dos pneus em função do tempo.

Particularmente, é provável que a hipótese feita na modelagem das forças verticais envolvendo a aceleração média constante pode se apresentar como um fator prejudicial, como mostra o gráfico da evolução das normais, Figura 3.9: mesmo em velocidades baixas, a distribuição de massa fica longe da esperada para o repouso, indicando claramente a soma (ou subtração) errônea de um valor virtual.

Um modelo anterior, o primeiro desenvolvido para o projeto, apresentava uma curva de velocidade por tempo mais real, inclusive atingindo 100 km/h em cerca de onze segundos – como era esperado. No entanto, a tentativa original falhava na representação da rotação das rodas (que subiam excessivamente) e dos escorregamentos. No modelo atual, esses dois desvios foram quase totalmente corrigidos, apesar das rodas ainda passarem um pouco do limite crítico para pneus radiais leves (que é de cerca de 3% de escorregamento). Isso se deve à escolha da constante  $b$  do pneu, que foi reduzida para evitar erros numéricos na simulação.

### 3.3 MODELO NÃO-LINEAR DA DINÂMICA LATERAL

A experiência obtida com o modelo de dinâmica longitudinal anterior mostrou a dificuldade em se trabalhar com equações de movimento que levem em consideração a transferência de carga decorrente das acelerações. A linearização de tal sistema, também, ficaria comprometida se fossem utilizadas expansões em séries de Taylor.

Porém, se o controle sobre o veículo for exercido ao redor de uma condição de equilíbrio, supondo pequenos desvios da mesma, é razoável desprezar as transferências de carga relacionadas às taxas de variação das velocidades. As constatações obtidas em Baruffaldi et alii (2008ii) endossam a possibilidade de desprezar um modelo de esforço longitudinal do pneu dependente do escorregamento.

Admite-se, agora, um veículo executando um movimento livre em um plano, como mostra a Figura 3.11.

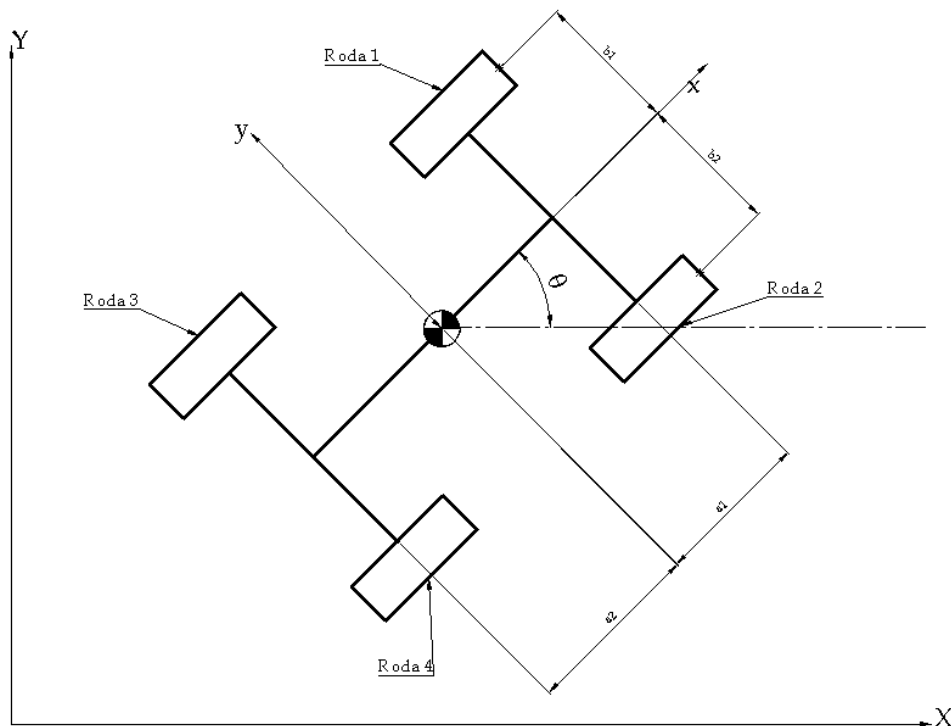


Figura 3.11- Veículo em movimento plano.

Para o desenvolvimento do modelo matemático, foram levantadas as seguintes hipóteses:

1. O veículo apresenta movimentos de rolagem e arfagem desprezíveis e que não afetam a distribuição de peso entre as rodas;
2. As forças desenvolvidas longitudinalmente pelos pneus independem dos escorregamentos e, portanto, são diretamente proporcionais ao torque aplicado pelo trem de forças;
3. As forças laterais são dependentes das cargas verticais e dos ângulos de deriva e obedecem à lei linear  $F_{y,i} = -C_{\alpha} \cdot F_{z,i} \cdot \alpha_i$ ;
4. Os ângulos de deriva são pequenos e podem ser aproximados por  $\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}$ .

O sistema apresenta três graus de liberdade: duas translações e uma rotação. Como o interesse está em se determinar as velocidades do veículo, é mais conveniente descrever o problema em termos de coordenadas locais (não holônomas), que independam da posição absoluta do carro em um sistema de cartesiano.

O desenvolvimento das equações de movimento segue o que foi visto na seção 3.1, para o caso do pneu. As forças de resistência consideradas foram as aerodinâmicas (longitudinal e lateral), aplicadas ao centro de massa do veículo, e a resistência ao rolamento longitudinal dos pneus, aplicadas no centro da área de contato dos pneus. O sistema ( 63 ) a seguir dá a descrição matemática do problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\dot{u} + mrv = \sum F_{x,i} - \sum F_{r,i} - \frac{1}{2} \rho A_x C_x u^2 \\ m\dot{v} - mru = F_{y,i} - \frac{1}{2} \rho A_x C_y v^2 \\ I\dot{r} = a_1 (F_{y,1} + F_{y,2}) - a_2 (F_{y,3} + F_{y,4}) + \\ -b_1 (F_{x,1} - F_{r,1} + F_{x,3} - F_{r,3}) + b_2 (F_{x,2} - F_{r,2} + F_{x,4} - F_{r,4}) \end{array} \right. \quad (63)$$

Nesse sistema, as velocidades de translação e rotação são as variáveis dependentes e as forças longitudinais  $F_{x,i}$  são as entradas.

A Tabela 3.1 elenca os valores das constantes substituídas para as simulações:

Tabela 3.1: Constantes utilizadas para as simulações

| Constante            | Descrição                                        | Valor                     |
|----------------------|--------------------------------------------------|---------------------------|
| <b>m</b>             | Massa                                            | 1200,00 kg                |
| <b>I</b>             | Momento de inércia de guinada                    | 1070,00 kg.m <sup>2</sup> |
| <b>C<sub>x</sub></b> | Coeficiente longitudinal de arrasto aerodinâmico | 0,33                      |
| <b>C<sub>y</sub></b> | Coeficiente lateral de arrasto aerodinâmico      | 0,80                      |
| <b>A<sub>x</sub></b> | Área frontal                                     | 1,71 m <sup>2</sup>       |
| <b>ρ</b>             | Densidade do ar                                  | 1,225 kg/m <sup>3</sup>   |
| <b>f<sub>0</sub></b> | Coeficiente de resistência ao rolamento          | 0,08                      |
| <b>C<sub>α</sub></b> | Coeficiente de esterçamento dos pneus            | 11,50 1/rad               |
| <b>a<sub>1</sub></b> | Braço dianteiro                                  | 1007,00 mm                |
| <b>a<sub>2</sub></b> | Braço traseiro                                   | 1483,00 mm                |
| <b>b<sub>1</sub></b> | Braço esquerdo                                   | 700,00 mm                 |
| <b>b<sub>2</sub></b> | Braço traseiro                                   | 700,00 mm                 |

### 3.3.1 Cálculo das forças laterais

Como já observado, a geração das forças laterais nos pneus depende do seu ângulo de deriva que, para pequenos valores, pode ser aproximado pela razão entre as velocidades longitudinal e lateral do pneu. O veículo é um corpo que apresenta rotação e, portanto, as velocidades nas áreas de contato dos pneus não serão iguais às do centro de massa, mas podem ser escritas em função destas.

Se a carroceria comporta-se como um corpo rígido, a velocidade de um ponto qualquer,  $\vec{V}_P$ , é dada por:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times (\vec{P}_i - \vec{O}) \quad (64)$$

A velocidade angular,  $\omega$ , é conhecida e vale  $r\vec{k}$ . Os vetores  $(\vec{P}_i - \vec{O})$  também são determinados pela geometria do veículo (Figura 3.11). Admitindo o ponto  $O$  coincidente com o centro de massa e efetuando as operações pertinentes, os seguintes ângulos de deriva podem ser obtidos:

$$\alpha_1 = \frac{v + r \cdot a_1}{u - r \cdot b_1} \quad (65)$$

$$\alpha_2 = \frac{v + r \cdot a_1}{u + r \cdot b_2} \quad (66)$$

$$\alpha_3 = \frac{v - r \cdot a_2}{u - r \cdot b_1} \quad (67)$$

$$\alpha_4 = \frac{v - r \cdot a_2}{u + r \cdot b_2} \quad (68)$$

Claramente, admitir essa aproximação para os ângulos de deriva já no sistema não linear leva a uma restrição maior de sua validade. É preciso tomar certo cuidado ao se analisar os dados provenientes da sua solução. Para monitorar se o modelo permaneceu dentro da margem de validade durante as análises, o programa escrito inclui o cálculo dos ângulos de deriva de cada pneu.

Para verificar a consistência do modelo, foi realizada uma simulação de uma manobra típica em pista molhada. Um veículo de tração dianteira parte com velocidade de 54 km/h (15 m/s) acelerando sob forças trativas de 4000 N. Após 2 segundos, o motorista vê algum obstáculo e solta o pedal do acelerador para apertar

os freios. Enquanto ele move seu pé, o motor desacelera o veículo com 500 N por 0,1 segundo. A partir daí, há ação dos freios que, no entanto, não atuam de forma adequada, pois a pista do lado direito do veículo está molhada, reduzindo consideravelmente a potência de frenagem disponível.

As forças desiguais geram um desequilíbrio de momentos ao redor do centro de massa, que força o giro do veículo. Eventualmente, o aumento das forças laterais, que é proporcional aos ângulos de deriva dos pneus, faz o veículo voltar a andar em linha reta. Na realidade, essa volta ao equilíbrio dificilmente ocorre, pois os pneus tendem a sair da região de atrito linear e começam a deslizar, cessando a geração das forças laterais.

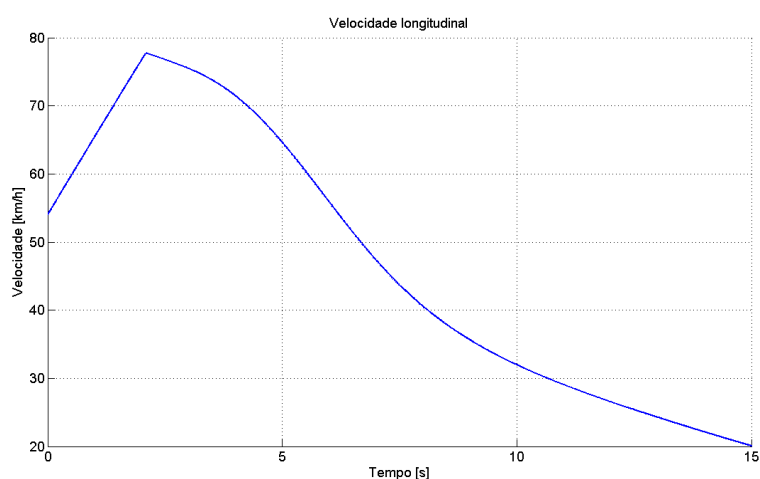


Figura 3.12 - Velocidade longitudinal no modelo não linear.

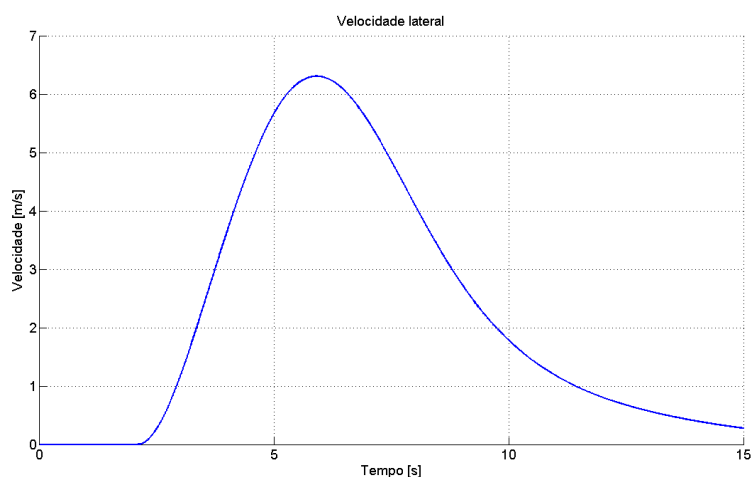


Figura 3.13 - Velocidade lateral no modelo não linear.

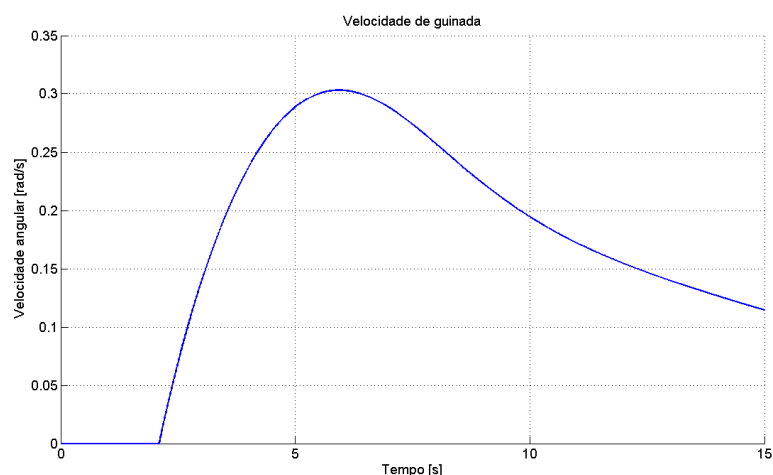


Figura 3.14 - Velocidade de guinada no modelo não linear.

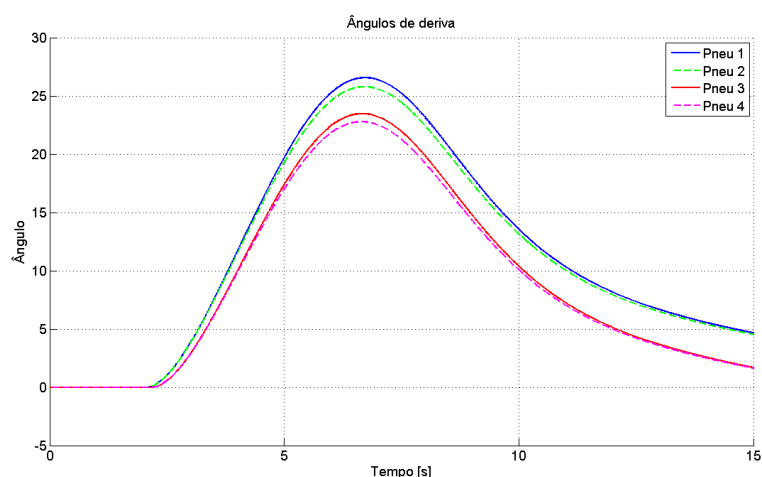


Figura 3.15 – Ângulos de deriva no modelo não linear.

As Figuras de Figura 3.12 a Figura 3.15 mostram os resultados da análise. Como o esperado, a perda de aderência induz o giro do veículo, mas os pneus lutam para diminuir os ângulos de deriva após passar por um pico. Foi tomado o cuidado para não ultrapassar os limites do modelo e, como se pode notar pela Figura 3.15, os ângulos de deriva não ultrapassam muito os  $25^\circ$ .

Apesar de possuir essa limitação quanto ao ângulo máximo de deriva dos pneus, o modelo pode ser considerado ideal para sofrer o controle, dado que, de fato, não é desejável que os pneus saiam da região de aderência linear.

### 3.4 MODELO LINEARIZADO DA DINÂMICA LATERAL

O modelo acima descrito pode ser linearizado ao redor de uma condição de equilíbrio para estudar-se a dinâmica das variações das variáveis de estado. Assim, o sistema, escrito em notação de Einstein fica:

$$\dot{x} = f_j(x_0) + \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \bigg|_{x_0} \Delta x_j + \frac{\partial f_j}{\partial F_{x,i}} \bigg|_{x_0} \Delta F_{x,i} \quad (69)$$

Com  $i$  variando de 1 a 4 (para cada uma das rodas) e  $j$  de 1 a 3 (para cada uma das variáveis dependentes).

As funções  $f_i$  são:

$$f_1(u, v, r) = \frac{F_{x,i} - F_{r,i}}{m} - rv - \frac{R_x}{m} u^2 \quad (70)$$

$$f_2(u, v, r) = \frac{k}{m} F_{z,i} \cdot \alpha_i + ru - \frac{R_y}{m} v^2 \quad (71)$$

$$f_3(u, v, r) = -\frac{b_1}{I} \cdot (F_{x,1} + F_{x,3} - F_{r,1} - F_{r,3}) + \frac{b_2}{I} \cdot (F_{x,2} + F_{x,4} - F_{r,2} - F_{r,4}) + \frac{a_1 k}{I} (F_{z,1} \cdot \alpha_1 + F_{z,2} \cdot \alpha_2) - \frac{a_2 k}{I} (F_{z,3} \cdot \alpha_3 + F_{z,4} \cdot \alpha_4) \quad (72)$$

Nas equações acima,  $R_x$  e  $R_y$  resumem as propriedades de arrasto aerodinâmico.

Como boa parte das propriedades foi considerada constante, o trabalho matemático de linearização fica restrito ao cálculo das derivadas parciais dos ângulos de deriva e das funções com variáveis cruzadas. Para organizar a programação computacional, foi criada uma função especial cujo único objetivo é linearizar os ângulos de deriva.

Explicitamente, as matrizes ficam:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{m} R_x \cdot x_{1_0} & -x_{3_0} & -x_{2_0} \\ \frac{k}{m} \left( F_{z_i} \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} \right) + x_{3_0} & \frac{k}{m} \left( F_{z_i} \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} - 2 \cdot R_y \cdot x_{2_0} \right) & \frac{k}{m} \left( F_{z_i} \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} \right) + x_{1_0} \\ \frac{k}{I} \left[ a_1 \cdot \left( F_{z_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + F_{z_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \right) + \right. & \frac{k}{I} \left[ a_1 \cdot \left( F_{z_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} + F_{z_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) + \right. & \frac{k}{I} \left[ a_1 \cdot \left( F_{z_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} + F_{z_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} \right) + \right. \\ \left. -a_1 \cdot \left( F_{z_3} \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} + F_{z_4} \cdot \frac{\partial \alpha_4}{\partial x_1} \right) \right] & \left. -a_2 \cdot \left( F_{z_3} \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} + F_{z_4} \cdot \frac{\partial \alpha_4}{\partial x_2} \right) \right] & \left. -a_2 \cdot \left( F_{z_3} \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3} + F_{z_4} \cdot \frac{\partial \alpha_4}{\partial x_3} \right) \right] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_1}{I} & \frac{b_2}{I} & -\frac{b_1}{I} & \frac{b_2}{I} \end{bmatrix}$$

Onde  $\partial\alpha_i/\partial x_j$  são as derivadas parciais dos ângulos de deriva.

A qualidade da linearização foi testada com uma entrada semelhante àquela utilizada no modelo não-linear e os resultados são mostrados a seguir, na Figura 3.16.

Pode-se notar que a resposta linear é amenizada, se comparada com a não linear, mas que o comportamento se mantém. Esse resultado obviamente já era esperado, mas garante a qualidade da linearização.

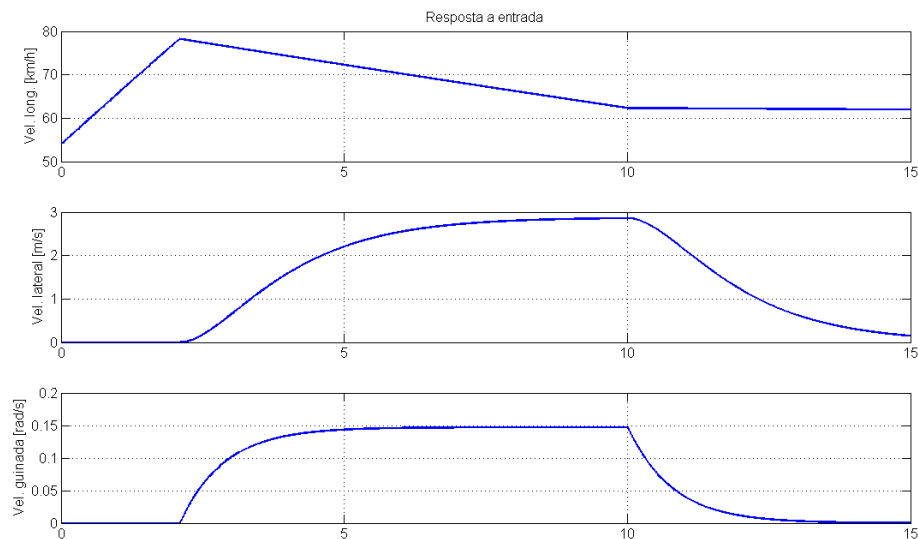


Figura 3.16 - Respostas do modelo linearizado.

### 3.4.1 Nota sobre o modelo da dinâmica lateral

Ao primeiro contato, esse modelo simplificado de dinâmica lateral pode parecer demasiadamente incompleto, pois não leva em consideração as rotações dos pneus e seus escorregamentos. Dois argumentos, porém, depõe a seu favor.

O primeiro deles é a simplicidade. Não considerando os escorregamentos, o processo de entendimento do fenômeno ficou mais fácil, sem perda significativa de qualidade (ainda que os dados não sejam quantitativamente corretos). O algoritmo, no entanto, foi confeccionado de forma que a inclusão dos efeitos da redistribuição

da carga e de mudanças nos coeficientes de esterçamento das rodas fosse facilitada.

O segundo argumento é o fato de ser possível utilizar dois sistemas de controle separados. O primeiro, que será desenvolvido a seguir, procura controlar o veículo como um todo e informará às pinças de freio qual a força que deseja nas rodas para que isso seja possível. Este sistema estará interconectado com o mecanismo de auto-ajuste das rodas que, baseado nas forças informadas pela malha principal, atuará diretamente sobre a rotação e sobre o escorregamento de cada pneu. Em outras palavras, o modelo simplificado fornece, para as ações de controle, uma visão global do estado do veículo, enquanto que os controles das rodas atuam nos problemas de forma local.

## 4 PROJETO DO CONTROLE DA DINÂMICA LATERAL

Com o sistema linearizado ao redor de uma condição de contorno, é possível utilizar as técnicas disponíveis para realizar o controle da dinâmica do sistema. Para tanto, as equações delimitadas no item 3.4 podem ser escritas no espaço de estados, como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\tag{73}$$

Claramente, o conteúdo das matrizes **A** e **B** depende da condição de linearização utilizada. Por exemplo, para um veículo movendo-se em linha reta a 20 m/s, a matriz dinâmica fica:

$$\mathbf{A}_{[20,0,0]} = \begin{bmatrix} -0,0115 & 0 & 0 \\ 0 & -0,575 & 20 \\ 0 & 0 & -0,963 \end{bmatrix}$$

Enquanto que, para a velocidade de 55 m/s, a mesma matriz é dada por:

$$\mathbf{A}_{[55,0,0]} = \begin{bmatrix} -0,0317 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2091 & 55 \\ 0 & 0 & -0,3502 \end{bmatrix}$$

Fisicamente, isso significa que o sistema apresentará comportamentos diferentes para diferentes condições de entrada. Do ponto de vista do projeto de controle, é necessário atentar para o fato de um veículo de passeio comum trafegar em condições muito diversificadas de velocidade e aderência. Tipicamente, a necessidade de controle de estabilidade aparece quando a velocidade ultrapassa 30 km/h (8,3 m/s). De fato, se o controle estiver ativo nas velocidades de manobra, seu efeito pode ser desagradável para o motorista.

Além disso, as condições de estabilidade podem variar com a combinação de condições iniciais de linearização. Com o veículo andando em linha reta, o sistema é inerentemente estável na faixa de velocidades estudada (Figura 4.1). Quando submetido a condições iniciais mais extremas, como grandes velocidades de guinada, o veículo corre o risco de tender à instabilidade. A Figura 4.2 mostra outro mapa de raízes do sistema com diversas combinações de condições iniciais. De maneira geral, é possível notar que o sistema deixa de ser estável quando o ângulo

de deslizamento lateral começa a ultrapassar  $5^\circ$  (em outras palavras, quando as hipóteses de linearização deixam de ser válidas).

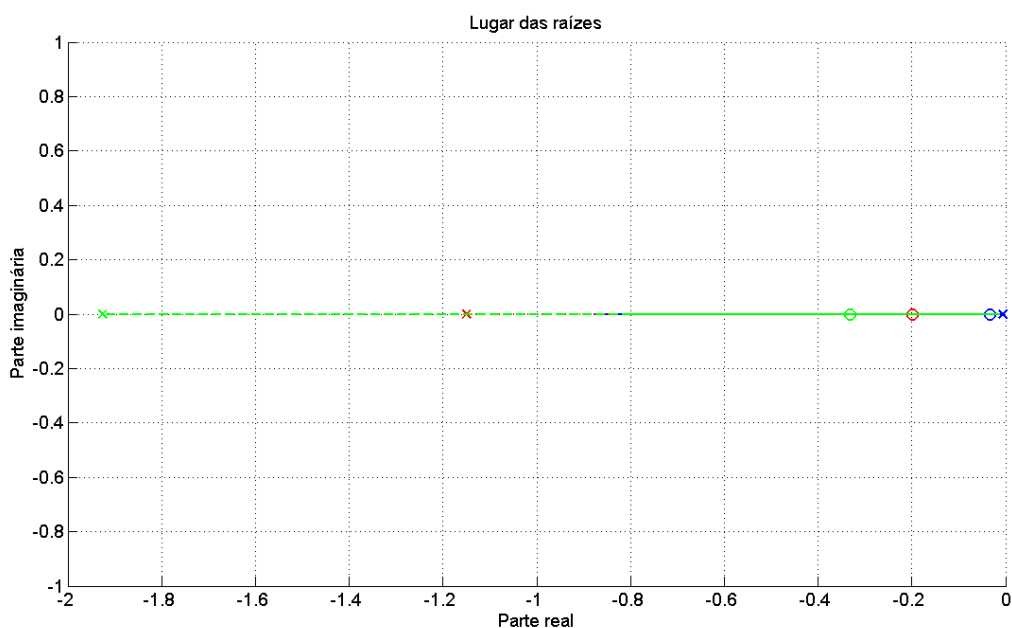


Figura 4.1 – Mapa do lugar das raízes para velocidade longitudinal entre 10 m/s (x) e 60 m/s (o).

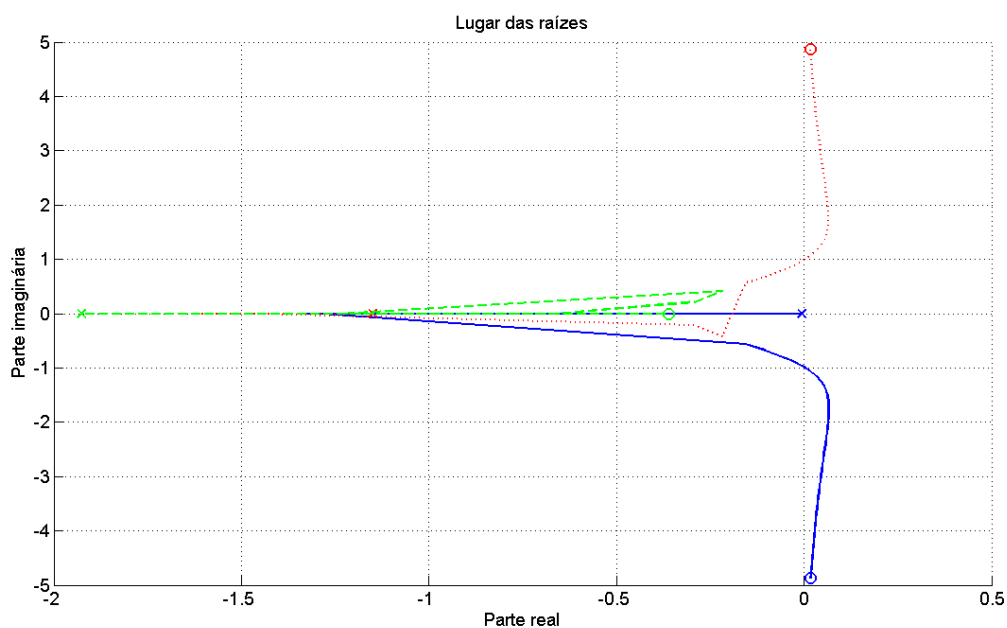


Figura 4.2 – Mapa do lugar das raízes para diversas combinações de condições iniciais.

É interessante, porém, que o controle remodele o sistema de maneira a garantir sua estabilidade mesmo em situações mais adversas. Isso pode ser feito pela alocação dos pólos e dos zeros das funções de transferência entre entradas e variáveis de estado ou, sob a ótica do controle moderno, pelo re-mapeamento das auto-características da matriz dinâmica do sistema.

A planta do sistema apresenta três variáveis de estado: a velocidade longitudinal, a velocidade lateral e a velocidade de guinada. A primeira e a última grandeza podem ser medidas, ou estimadas, por sensores de roda e sensores de guinada. Os sensores de roda, usualmente, são compostos por discos vazados, ou engrenagens, que giram e refletem os pulsos de sensores indutivos de presença (Figura 4.3). Em um veículo normal, dotado de diferencial e freios ABS, podem existir de dois a quatro desses e a velocidade longitudinal do veículo pode ser obtida com o uso de um filtro de Kálmán aplicado aos sinais de tais sensores. Os sensores de velocidade de guinada também já equipam veículos dotados de sistemas de controle ESP e podem ser encontrados no mercado. Já a velocidade lateral deve ser estimada a partir dos dados dos sensores e das entradas pretendidas. Para isso, é necessário o projeto de um observador de estados, que é uma reprodução da planta original que tem como saída uma estimativa dos componentes faltantes do vetor de estados.

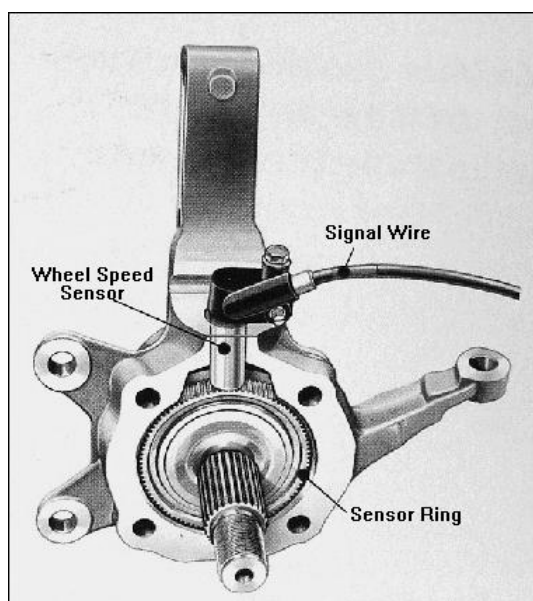


Figura 4.3 – Detalhe de manga de eixo mostrado o disco dentado e o sensor de velocidade.

#### 4.1 ALOCAÇÃO DOS PÓLOS

Uma das técnicas mais consolidadas para o projeto de controle no domínio do tempo é a alocação de pólos. Esse método consiste em modificar a dinâmica do sistema, posicionando as raízes da equação característica (dada por  $|sI - A| = 0$ ) de tal forma que o sistema responda da maneira desejada.

Apesar de ser de implantação um pouco mais cara, os sistemas de controle baseados no espaço de estados, em contraposição àqueles desenvolvidos a partir das funções de transferência, permitem uma abordagem mais integrada dos diversos graus de liberdade.

Tome-se, para o projeto de controle, uma situação na qual o controle de aderência dos pneus pode ser essencial para que a segurança do usuário: o veículo andando em linha reta a 20 m/s (72 km/h). Para representar a perda de aderência nessa situação, impôs-se uma força contrária ao movimento apenas na roda traseira direita. Nesse caso, a resposta do veículo é dada pela Figura 4.4.

Note-se que a velocidade longitudinal passa a cair quase que monotonicamente. O mais grave, no entanto, é o crescimento e a estabilização em um valor de cerca de -3,8 %/s da velocidade de guinada. Isso indica que o veículo passa a executar um movimento de rotação em volta do próprio eixo de intensidade considerável. Como o modelo linear amaina os efeitos percebidos na prática, é de se esperar que o veículo real comporte-se de maneira ainda mais instável.

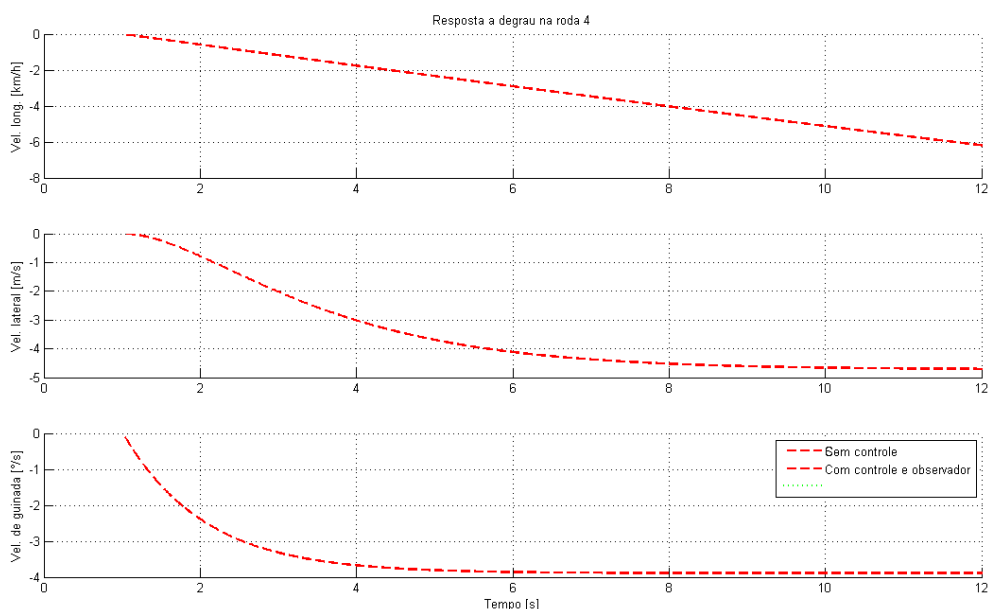


Figura 4.4: Resposta do sistema linearizado a entrada degrau na roda traseira direita.

Para o caso estudado em especial, os pólos de malha aberta encontram-se em -0,0115 (velocidade longitudinal), -0,5750 (velocidade lateral) e -0,9630 (velocidade de guinada). Como, em um sistema linear, o modo dominante é aquele

referente ao pólo lento, conclui-se que a baixa frequência natural da velocidade longitudinal atrasa a resposta do sistema.

O controle por alocação de pólos é feito impondo-se aos atuadores do sistema entradas proporcionais ao estado, ou, matematicamente:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Substituindo a expressão (74) na equação da dinâmica do veículo, chega-se a:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{f} \quad (75)$$

Onde  $\mathbf{f}$  são as forças sobre as quais não pode haver ação de controle e que, no modelo, fazem as vezes de interferências do meio sobre o veículo (quedas de aderência locais).

Por tentativa e erro, pôde-se concluir que uma trinca de valores de pólos que satisfaz adequadamente as condições de resposta para uma boa gama de condições de controle é:

$$p_1 = -2,5 \quad p_2 = -3,2 - 0,5i \quad p_3 = -3,2 + 0,5i$$

A resposta ao mesmo degrau de aderência que ocorre no caso anterior com o sistema controlado dessa maneira é dada pela Figura 4.5.

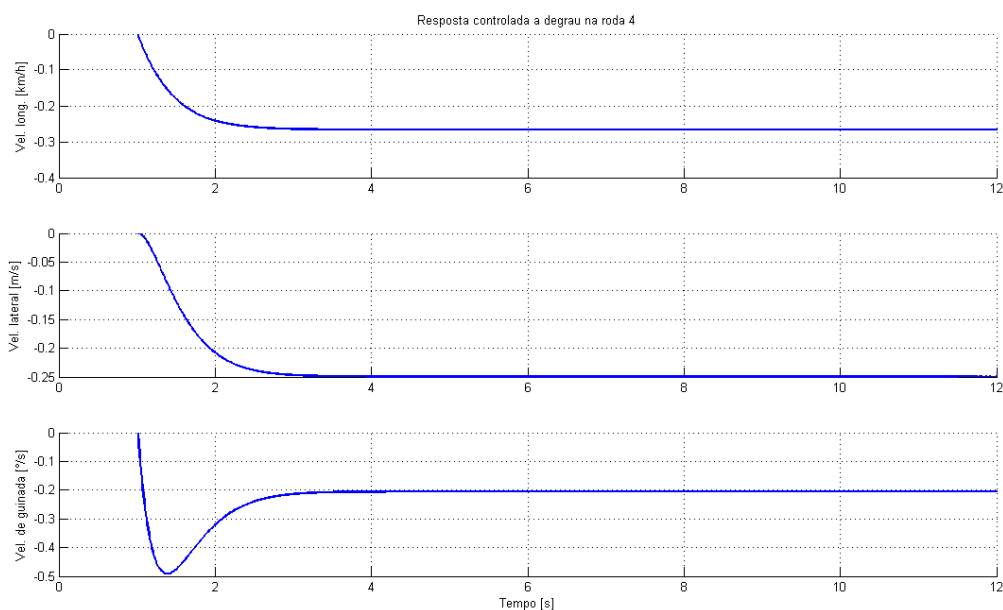


Figura 4.5: Resposta controlada ao degrau na roda traseira direita.

Com isso, a velocidade angular de guinada apresenta sobre sinal máximo de 141% e tempo de acomodação de cerca de 4 segundos. O sobre sinal pode, em primeira análise, parecer exagerado, mas comparando com a resposta obtida na Figura 4.4, nota-se que a intensidade da variação foi bastante reduzida.

Transmitindo para a realidade, o motorista sentiria o veículo tender a girar levemente no sentido horário. Se nenhuma ação for tomada pelo usuário, o veículo tenderá a continuar girando, porém, o controle atenua a velocidade de giro, dando a ele tempo de tomar alguma ação corretiva.

A qualidade da resposta do sistema também pode ser verificada por outra situação possível. Agora, o motorista sente a passagem de uma região de baixa aderência no pneu traseiro direito e executa uma frenagem de emergência, rapidamente travando as rodas.

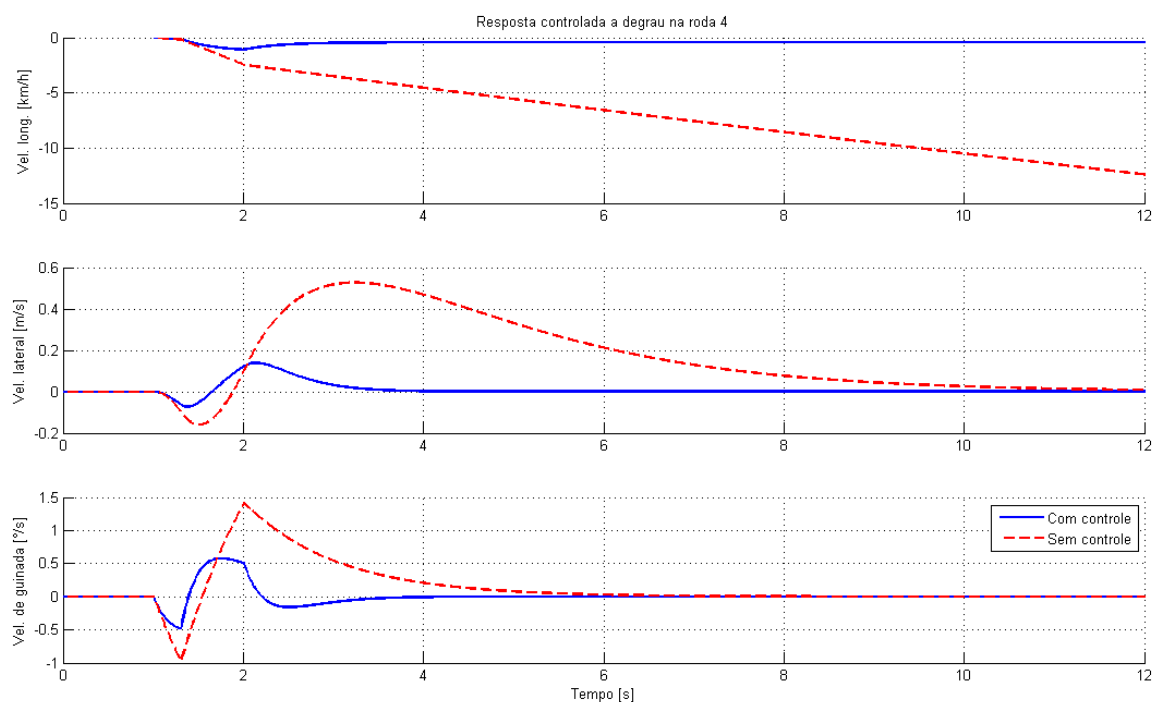


Figura 4.6 – Resposta do sistema com e sem controle para frenagem de emergência

Observa-se que a resposta mostrou-se adequada, atenuando as acelerações e reduzindo o tempo de resposta.

## 4.2 ESTIMATIVA PARA A MEDIDA DA VELOCIDADE LATERAL

A técnica de uso de observadores de estado para se estimar a situação de um sistema linear em dado instante é amplamente conhecida e pode ser encontrada em diversos autores (OGATA, 2004). Um observador de estados de ordem plena simula totalmente a dinâmica do sistema original na busca por uma aproximação  $\mathbf{x}_o$  para o vetor de estado. Quando se tem medidas de algumas das variáveis, não é necessário que o vetor de estimativas tenha a mesma dimensão do vetor de estados, visto que pode ser completado pelas informações dos sensores. Nesse caso, o observador é de ordem mínima.

No caso do modelo do veículo estudado, duas das variáveis de estado estão disponíveis para realimentação direta, mas a velocidade lateral deve ser estimada. Assim, o vetor de estados pode ser dividido em duas partes: um vetor contendo as quantidades mensuráveis e um escalar não-mensurável. Assim:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \\ F_{x_4} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

A parte não mensurável do modelo apresenta a seguinte dinâmica:

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}\mathbf{x}_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b\mathbf{u} \quad (77)$$

Já o vetor de “medidas” do observador de ordem mínima pode ser entendido como:

$$\dot{\mathbf{x}}_a - \mathbf{A}_{aa}\mathbf{x}_a - \mathbf{B}_a\mathbf{u} = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b \quad (78)$$

Um observador de estados completo apresenta a seguinte equação dinâmica (OGATA, 2004):

$$\dot{\mathbf{x}}_o = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C})\mathbf{x}_o + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_o\mathbf{y} \quad (79)$$

Lembrando que  $\mathbf{y}$  é dado por  $\mathbf{C}\mathbf{x}$  e subtraindo a equação da dinâmica do sistema, pode-se encontrar a equação diferencial do erro de estimativa para o observador de ordem plena:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_o) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (80)$$

Por analogia com o sistema obtido para a dinâmica da parte não mensurável do vetor de estados, a equação do erro do observador de ordem mínima deve ser dada por:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_o\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \quad (81)$$

É usual, no projeto de observadores de ordem mínima, utilizar a seguinte transformação de coordenadas (OGATA, 2004):

$$\begin{aligned} \eta &= \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_o\mathbf{x}_a \\ \dot{\eta} &= \dot{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_o\dot{\mathbf{x}}_a \end{aligned} \quad (82)$$

Com a aplicação das eq. ( 77 ) e ( 78 ) na eq. ( 82 ), a dinâmica da estimativa fica dada por:

$$\dot{\eta}_o = \underbrace{(A_{bb} - K_o A_{ab})}_{A_o} + \underbrace{[(A_{bb} - K_o A_{ab})K_o + A_{ba} - K_o A_{aa}]}_{B_o} y + \underbrace{(B_b - K_o B_a)}_{F_o} u \quad (83)$$

E a relação entre  $\tilde{x}$  e  $\tilde{\eta}$  é:

$$\mathbf{x}_o = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C_o} \eta_o + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k_{o1} & k_{o2} \end{bmatrix}}_{D_o} y \quad (84)$$

O diagrama de blocos da Figura 4.7 mostra como fica o sistema acoplado ao controlador observador.

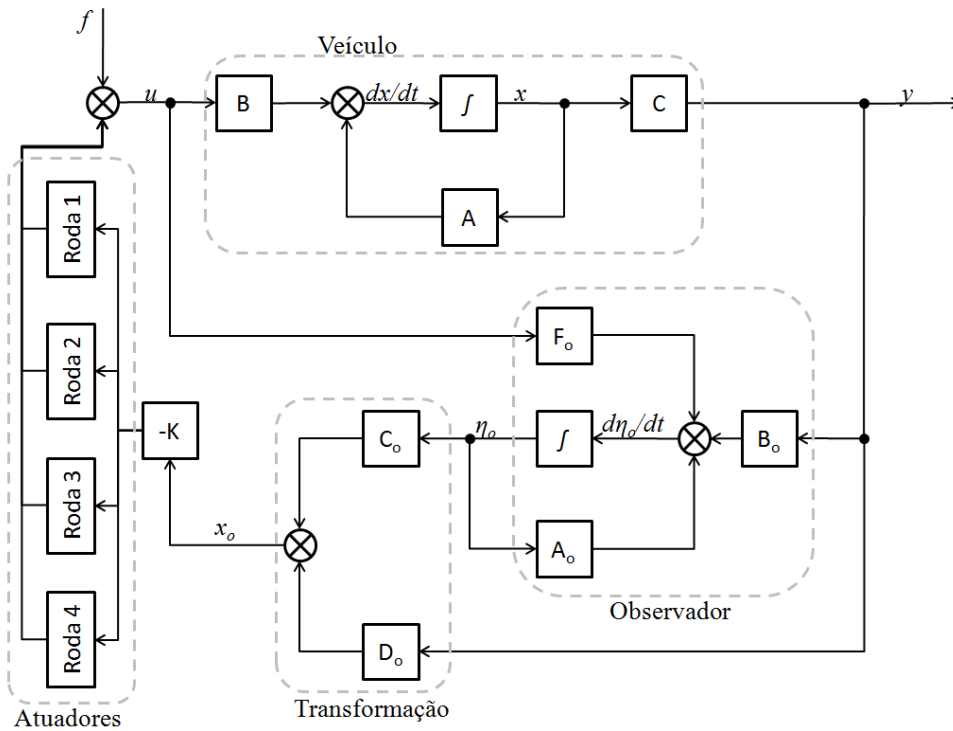


Figura 4.7 – Diagrama de blocos do sistema com controlador-observador.

Finalmente, o projeto do observador de estados consiste em alocar adequadamente os auto-valores para que o erro de estimativa convirja mais rapidamente do que a resposta do sistema. Apesar de, como foi dito anteriormente, as condições de linearização definirem qual a dinâmica do sistema não observado,

pode-se notar que seu pólos mantém-se dentro da faixa que vai até -2 para uma ampla faixa de valores iniciais.

A Figura 4.8 mostra como evolui o erro de observação quando o erro inicial é de 3 m/s.

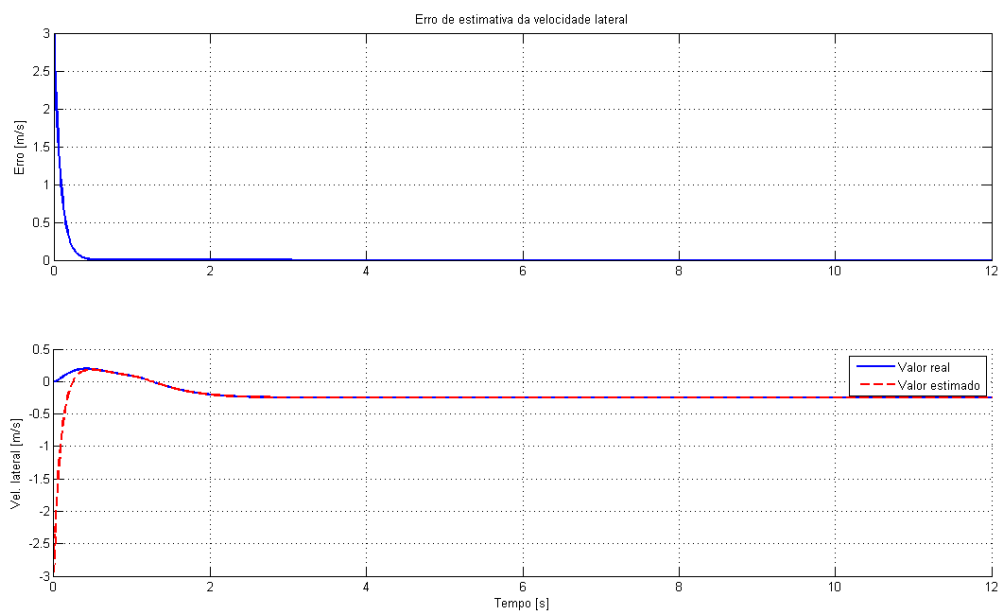


Figura 4.8 – Erro de observação.

## 5 PROTÓTIPO VIRTUAL

Apesar de o projeto de controle ter sido desenvolvido para um sistema linearizado, ele deve ser utilizável em situações e reais.

Para validar o modelo e as estratégias de controle desenvolvidas anteriormente, optou-se por confeccionar um protótipo virtual em ambiente de simulação multicorpos.

Os problemas de sistemas multicorpos geralmente envolvem a resolução de sistemas de equações com matrizes esparsas, que exigem estratégias especiais no algoritmo de resolução e métodos de passo variável (o que faz com que o Jacobiano varie continuamente). Apesar de o Matlab possuir funções que resolvem esse tipo de problema, elas não são otimizadas para esse fim.

O MSC.Adams, um programa destinado à simulação de sistemas multicorpos, possui um módulo que permite ao algoritmo de solução das equações comunicar-se com o Matlab para receber informações sobre o controle baseadas nas saídas de cada iteração no tempo.

A Figura 5.1 mostra uma imagem do modelo montado no Adams para as simulações.

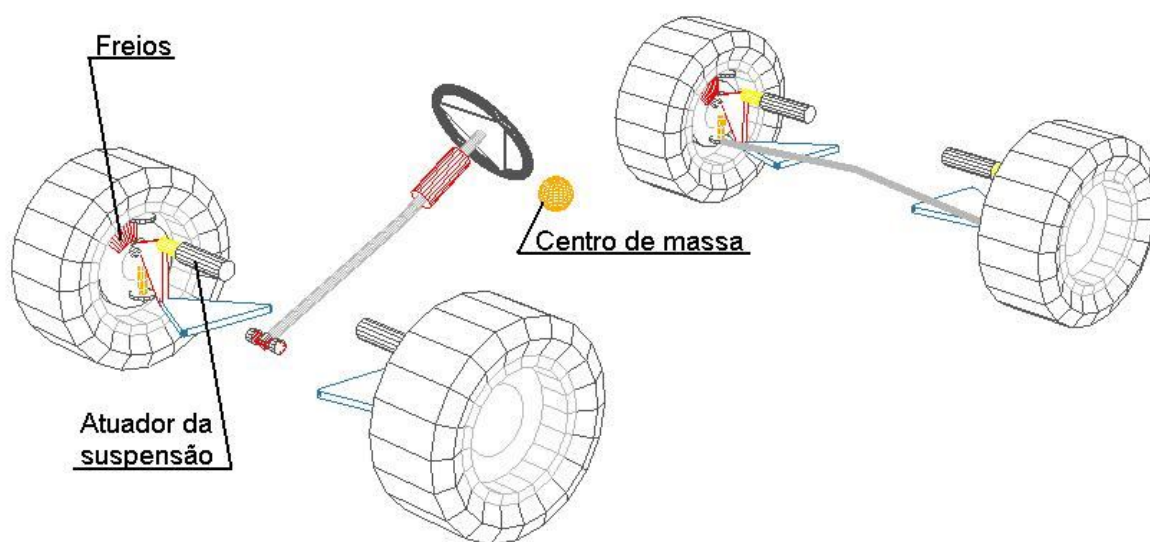


Figura 5.1 – Protótipo virtual no Adams/Car.

A comunicação entre o Matlab e o Adams se dá por meio de portas de entrada e saída criada no ambiente multicorpos. Essas portas transportam a informação entre os dois programas.

As análises conduzidas foram baseadas em uma manobra padronizada, a mudança de faixa ISO 3888. O veículo parte com uma velocidade determinada, muda de faixa e volta à trajetória retilínea original, como se estivesse ultrapassando um carro ou desviando de um obstáculo.

Essa manobra é especialmente interessante para simular o desempenho do sistema porque, originalmente, não é necessária a aplicação dos freios. Quando o asfalto se torna muito escorregadio, no entanto, o motorista precisa corrigir o curso com comandos de sobre-esterçamento. Com o auxílio do sistema de freios controlado, no entanto, a tarefa fica facilitada.

Como uma forma de verificar a sinergia entre os dois programas utilizados, a mesma simulação base foi calculada somente no Adams e, depois, com o processamento paralelo. O resultado das análises aparece sobreposto na Figura 5.2, juntamente com um gráfico mostrando a diferença absoluta entre os gráficos. Pode-se perceber que o erro é desprezível.

A eficiência do sistema de controle foi analisada por cinco casos-teste. Em todos eles, a velocidade inicial é de 100 km/h e o sistema apresentado na seção 4 foi linearizado ao redor das condições 100 km/h (velocidade longitudinal), 0 m/s (velocidade lateral), 0 rad/s (velocidade angular de guinada). Para o coeficiente de atrito da estrada foram impostos valores de 1.0, 0.8, 0.5, 0.3 e 0.1 (casos A, B, C, D e E, respectivamente). No Adams, o coeficiente de atrito da estrada é um valor que multiplica as forças geradas pelos pneus, representados por um modelo Pacejka.

A Figura 5.3 mostra o diagrama de blocos montado no Matlab/Simulink e a tabela descreve a função de cada bloco de interesse. Algumas adaptações foram necessárias para adequar o sistema de controle original à sua aplicação junto ao Adams.

Em primeiro lugar, foi necessário limitar os sinais de controle a valores negativos ou nulos, já que os atuadores de freios só podem imprimir forças contrárias ao movimento. O grande inconveniente dessa abordagem é a perda de informações e, conseqüentemente, de energia.

Tabela 5.1 – Função dos blocos.

| <b>Bloco</b>             | <b>Descrição</b>                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Sistema                  | Subsistema que executa a interface com o Adams. Contém as funções de transferência e os protocolos de comunicação. Tem como entradas os quatro torque nas rodas e como saídas diversas medidas fornecidas pelo Adams. |
| Ganho -1                 | Inverte o sinal da velocidade angular de guinada para adequá-lo ao sistema de coordenadas utilizado no controle                                                                                                       |
| Ganho de controle        | Matriz de ganhos de controle obtida para a alocação de pólos do sistema.                                                                                                                                              |
| Ganhos 1/1000            | Como o Adams apresenta as velocidades lineares em mm/s, esse ganho converte-as para as unidades do projeto, m/s.                                                                                                      |
| Integrador               | Integra o sinal de velocidade angular de guinada para determinar sua aceleração.                                                                                                                                      |
| Limitador de saturação   | Deixa apenas os sinais negativos passarem.                                                                                                                                                                            |
| Limitador de saturação 2 | Deixa apenas velocidades acima de 20 m/s serem utilizadas na rotina de controle, o que evita ganhos excessivos.                                                                                                       |
| Raio dos pneus           | Multiplica o valor das forças que saem do Ganho de controle pelo valor do raio de rolamento efetivo dos pneus.                                                                                                        |
| Switch                   | Compara os valores do ângulo de escorregamento e estabelece que o controle só seja passado ao sistema se essa grandeza for superior a um dado valor.                                                                  |

Outra modificação está relacionada ao conforto e à sensação de controle do motorista do veículo. Caso as ações de controle comecem a acontecer para qualquer pequeno desvio das condições iniciais, elas podem dificultar os comandos do motorista, por exemplo, em manobras de estacionamento. Por isso, as

informações de controle só passam para o sistema se o ângulo de escorregamento superar cerca de  $8^\circ$ .

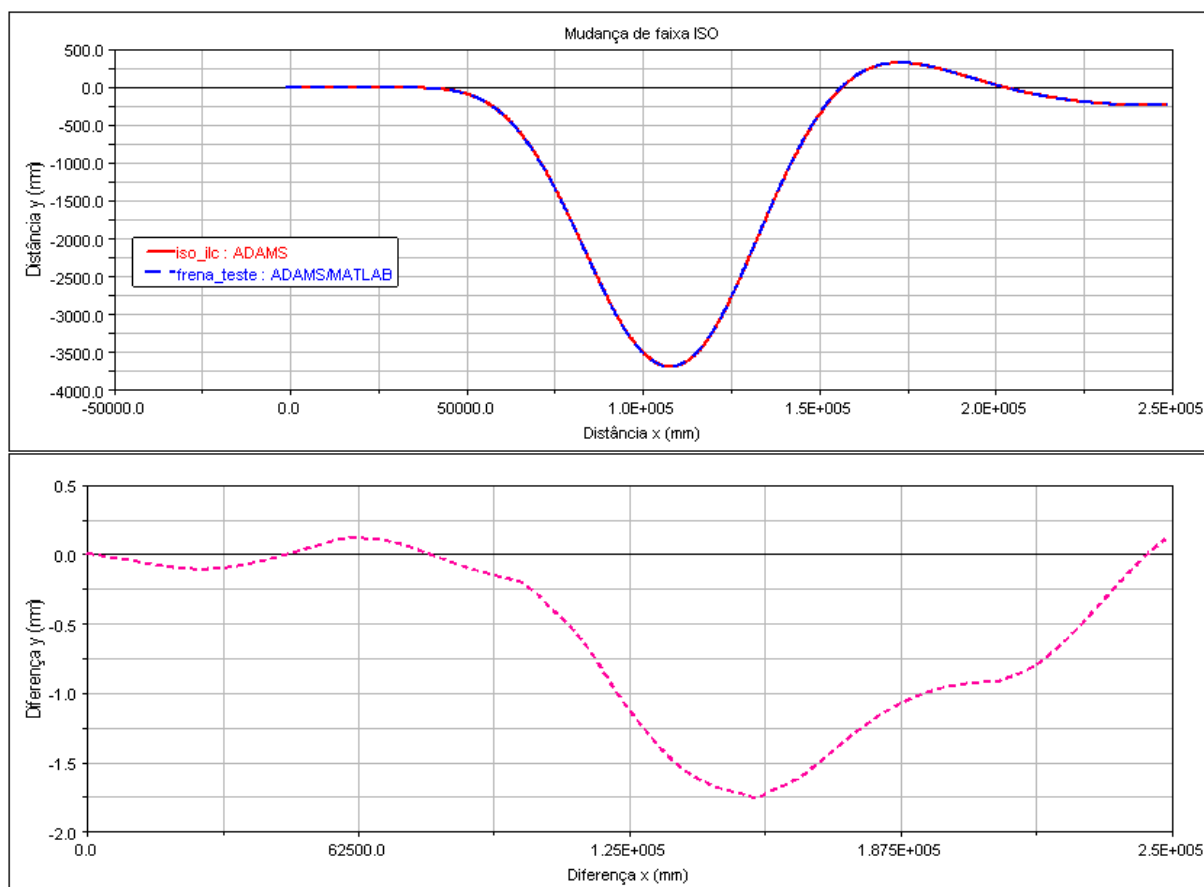


Figura 5.2 - Comparação entre duas simulações sem controle rodadas somente no Adams e com simulação paralela Matlab/Adams.

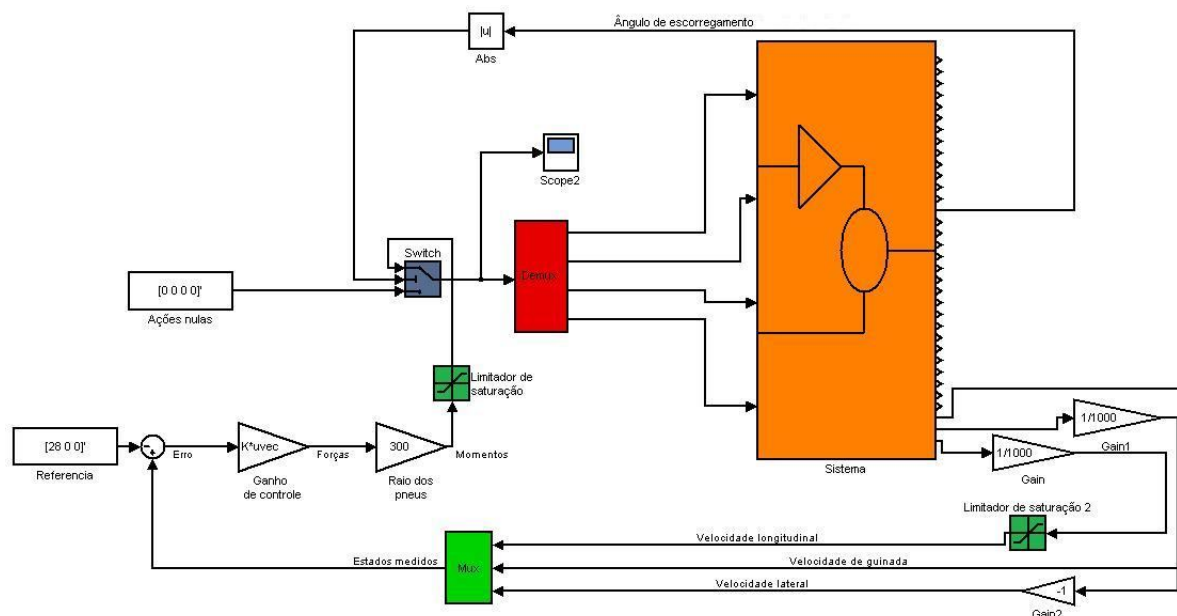


Figura 5.3 – Diagrama de blocos montado no Simulink.

Em linhas gerais, o bloco Sistema fornece, a cada passo de tempo, os valores das velocidades de interesse, que são transformadas em vetor no multiplexador. As informações são comparadas com o valor de referência e a diferença é multiplicada pelo ganho de controle K (da matriz de alocação de pólos). O ganho referente ao raio dos pneus transforma a saída em torque e o limitador de sinal rejeita os valores positivos; os comandos, então, são reinseridos no sistema e o ciclo se repete.

A Figura 5.4 a seguir mostra o resultado dos casos A, C e E simulados no Adams sem nenhuma ação de controle nos freios. Note-se que do caso A para o caso C há pouca alteração na trajetória descrita pelo veículo. Já na situação E, com a pista muito escorregadia, o motorista leva muito mais tempo para trazer o carro de volta à linha reta original.

Na Figura 5.5 pode-se verificar a variação do ângulo de esterçamento (no volante) que o motorista deve impor ao veículo para que a trajetória retilínea seja retomada. Na pista em condições ideais, caso A, o condutor mal precisa deslocar a direção (cerca de  $\frac{1}{4}$  de volta) para trocar de pista a 100 km/h. Com 30% da aderência inicial, no caso D, o volante deve ser esterçado mais de  $360^\circ$  para devolver o veículo à pista de origem. Se o coeficiente de atrito cai para 0.1, o motorista deve executar manobras de contra-esterçamento com mais de duas voltas completas no volante.

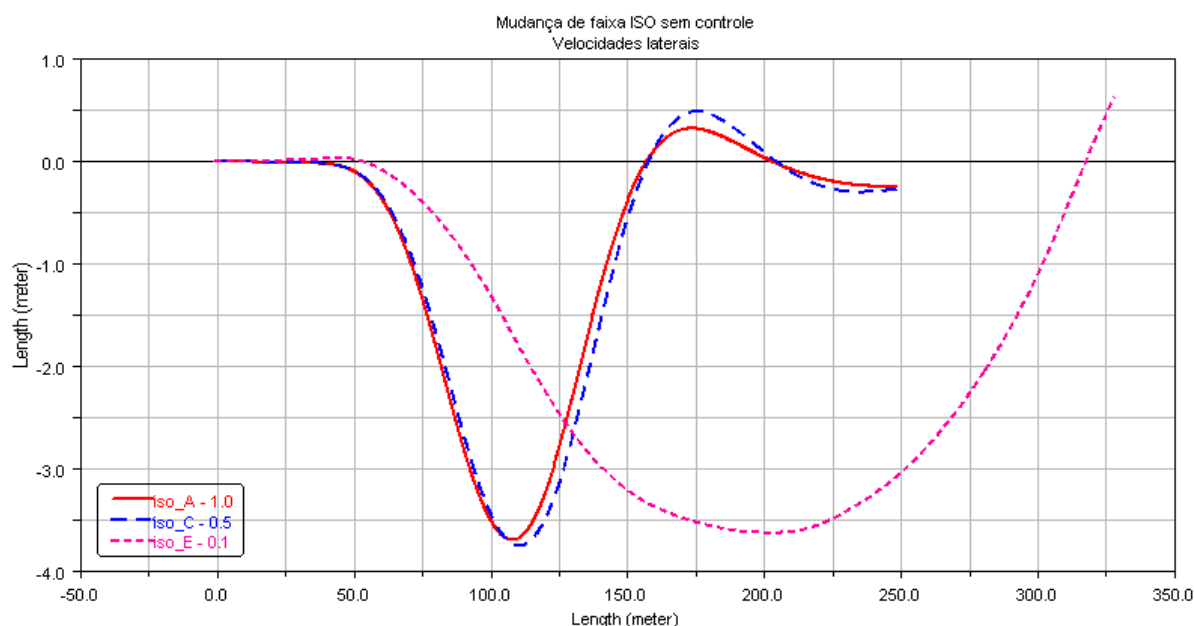


Figura 5.4 – Trajetória do veículo para três casos de pista sem controle nos freios.

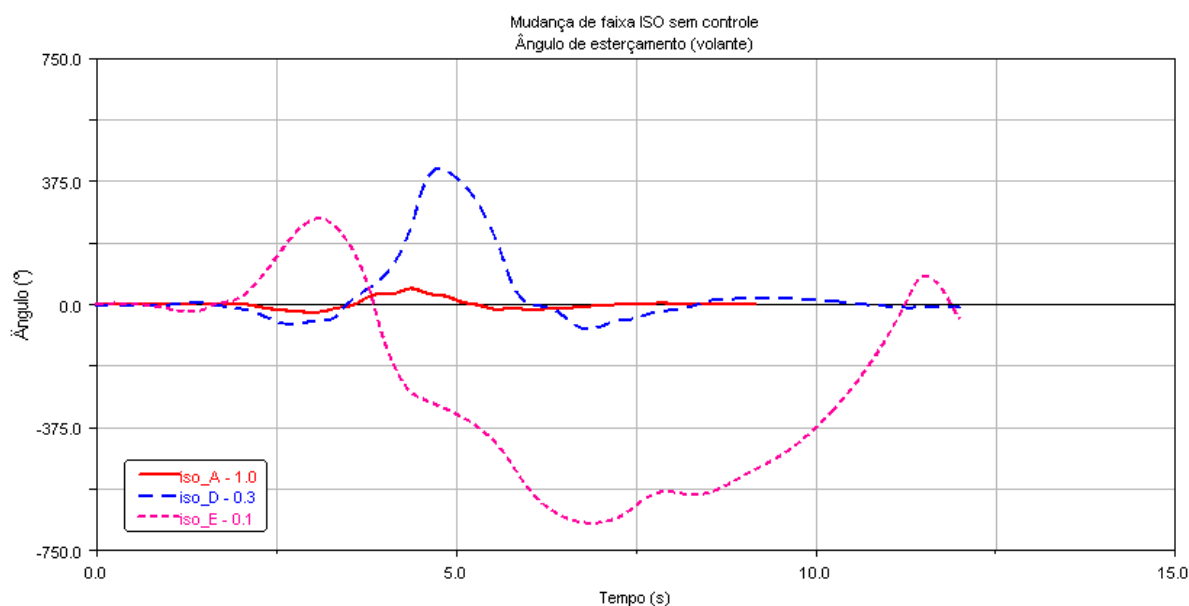


Figura 5.5 – Deslocamento angular do volante durante a mudança de pistas sem controle.

O controle sobre as rotações dos pneus reduz sua capacidade de gerar forças longitudinais, redirecionando a energia de contato para as laterais. Esse efeito ajuda o veículo a recuperar a estabilidade.

Para os casos em que o veículo não apresenta deslizamento excessivo, o controle não se faz presente, como ilustra a Figura 5.6.

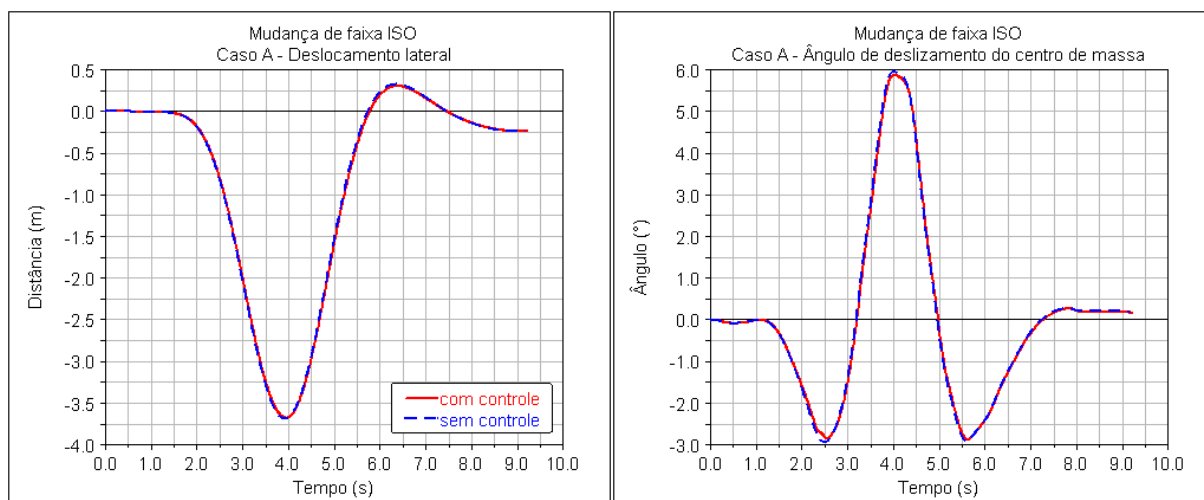


Figura 5.6 – Caso A com e sem controle de frenagem.

Quando as condições são extremas, no entanto, a ação do controle permite ao motorista controlar o veículo de maneira mais veloz, ainda que sacrificando um pouco do conforto: a Figura 5.7 mostra a comparação entre as trajetórias dos casos A e E sem controle e do caso E com controle. Fica claro que, com o auxílio ativo dos

freios, o motorista consegue retomar a trajetória original de forma quase como se a pista não fosse escorregadia.

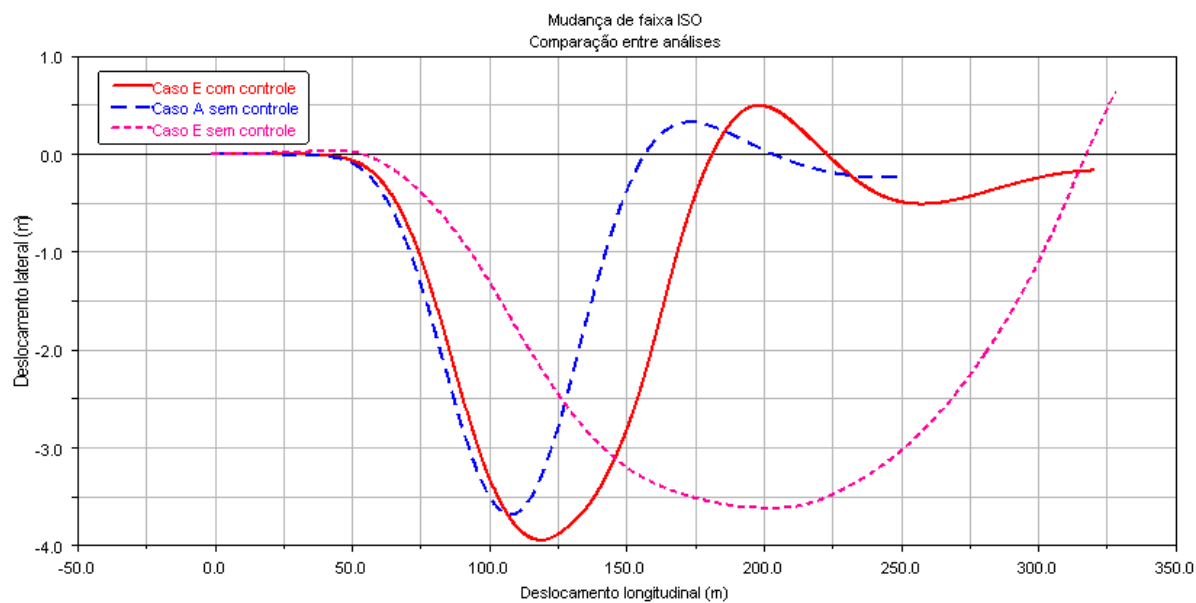


Figura 5.7 – Comparação entre simulação dos casos A e E sem controle e E com controle.

## 6 DISCUSSÃO

Os resultados apresentados pela interação Adams/Simulink podem ser considerados satisfatórios. A Figura 5.7 mostra que, sem as ações de controle aplicadas ao sistema de freios, o veículo demora praticamente o dobro de tempo para cruzar com sua trajetória original. Em uma situação real, essa diferença em distância poderia prevenir um acidente.

Se por um lado há uma melhora no controle direcional, as frenagens causam certo desconforto. A Figura 6.1 mostra a comparação entre as evoluções temporais das acelerações verticais no caso mais extremo controlado e no caso mais favorável sem controle algum. Nota-se que, com o controle, o chassi continua sofrendo acelerações por mais tempo, aumentando a sensação de desconforto.

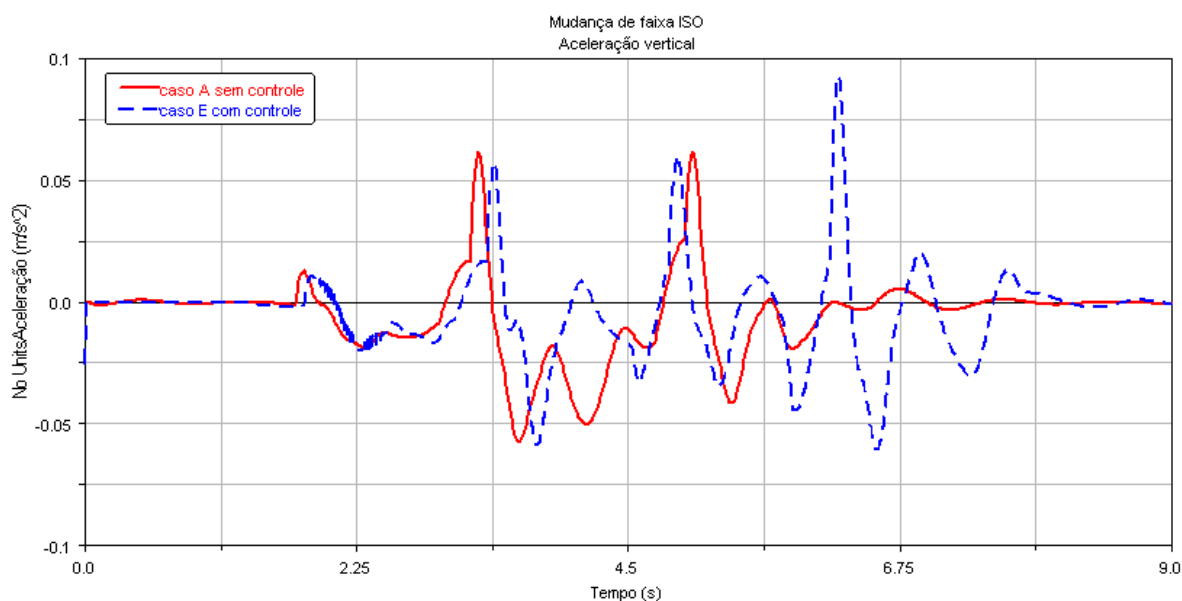


Figura 6.1 – Acelerações verticais em dois casos.

Uma maneira de se reduzir essa tendência seria incluir nas variáveis controladas os ângulos de rolagem e arfagem. Isso aumentaria a complexidade do modelo, pois esses estados são acoplados com as acelerações longitudinais e laterais.

Como já discutido anteriormente, o controle desenvolvido deve, idealmente, funcionar como um laço externo, que controla a dinâmica global do veículo e que passa informações para o controle específico de cada roda, que dá conta da dinâmica das forças nos pneus. Esse laço menor, acionado pelas pinças de freio,

deve receber como entradas os escorregamentos e determinar qual a força que deve ser exercida pelo pistão para atender aos comandos do laço exterior.

Para aperfeiçoar as capacidades do sistema de controle, seria interessante que, de tempos em tempos, ocorresse uma relinearização do sistema ao redor das condições medidas. Isso faria com que a matriz de ganhos de controle fosse variante no tempo.

## 7 CONCLUSÃO

Com base nos conhecimentos sobre a dinâmica de veículos e sobre o comportamento dos pneus, foram desenvolvidos dois modelos básicos para se estudar as respostas de um automóvel em termos de deslocamentos longitudinais, verticais e laterais.

Observando-se os resultados obtidos com o modelo da dinâmica longitudinal e comparando-os com dados de simulações de trabalhos anteriores, foi possível concluir que uma modelagem simplificada da geração das forças longitudinais dos pneus poderia ser adequada e razoavelmente precisa.

Um sistema de controle linear foi desenvolvido com base nas equações de movimento em curva do veículo. A abordagem de espaço de estados foi adotada e um controlador por alocação de pólos buscou conformar as características de resposta dinâmica do sistema.

Para confirmar a qualidade dos mecanismos de controle, co-simulações com o uso de programas multicorpos (MSC.Adams) e de CACSD (Matlab) foram utilizadas, mostrando a eficiência das ações corretivas em situações de aderência reduzida.

## REFERÊNCIAS

- AA1CAR. Apresenta informações sobre reparos de automóveis. Disponível em: <<http://www.aa1car.com>>. Acesso em: 21 de novembro de 2008.
- BARUFFALDI, L. B. et alii. **Aceleração-Tração-Inércias**: Corsa hatch 1.4 Maxx. São Paulo: EPUSP, 2008. Relatório técnico apresentado na disciplina PME2540 – Engenharia Automotiva I. 15 p.
- BARUFFALDI, L. B. Et alii. **Desempenho em aceleração e frenagem**: Corsa hatch 1.4 Maxx. São Paulo: EPUSP, 2008. Relatório técnico apresentado na disciplina PME2540 – Engenharia Automotiva I. 13 p.
- BOSCH, R. **Manual de tecnologia automotiva**. 25 ed. Tradução de Euryale de Jesus Zerbini ET alii. São Paulo: Edgard Blücher, 2005. 1232 p.
- CARSALE. Sítio de venda de automóveis. Disponível em: <<http://www.carsale.com.br>>. Acesso em: 28 de maio de 2008.
- CONTINENTAL AG. Sítio da companhia alemã. Disponível em: <<http://www.conti-online.com>>. Acesso em: 20 de novembro de 2008.
- GENTA, G. **Motor vehicle dynamics: modeling and simulation**. Cingapura: World Scientific, 1997. 345 p.
- GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of vehicle dynamics**. Warrendale: SAE, 1992. 495 p.
- LIE, A. et alii. **The effectiveness of the ESC (electronic stability control) in reduing real life crashes and injuries**. Relatório apresentado pela Administração Rodoviária da Suécia. 2003. 7 p.
- MARTINS, C. A. **Introdução à mecânica analítica**. São Paulo: EPUSP, 2006. Notas de aula do curso oferecido pelo Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da USP: PME2200 – Mecânica Geral B. 38 p.
- MILLIKEN RESEARCH ASSOCIATES. Williamsville. Sítio da empresa de consultoria em dinâmica e controle veicular. Disponível em: <<http://www.millikenresearch.com/mrandim.html>>. Acesso em: 28 de abril de 2007.
- MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. **Race car vehicle dynamics**. Warredale: SAE, 1995. 890 p.
- MSC SOFTWARE. **ADAMS/Car 2007 r1 User Guide**.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Pearson, 2005.
- PACEJKA, H. **Tyre and vehicle dynamics**. 2 ed. Burlington: Elsevier, 2006. 642 p.
- REIMPELL, J.; STOLL, H.; Betzler, J. W. **The automotive chassis: engineering principles**. Warrendale: SAE, 2001. 444 p.
- RILL, G. **Short course on vehicle dynamics**. Campinas: Unicamp, 2007. 181 p. Apostila do curso ministrado pelo Prof. Dr. Georg Rill na Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP entre 7 e 9 de agosto de 2007.
- RILL, G. **Wheel dynamics**. 2007. Ilhabela: ABCM, Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME 2007). 8 p.

SMITH, N. D. **Understanding parameters influencing tire modeling.** Fort Collins: Colorado State University, Department of Mechanical Engineering, 2003. 22 p.

WHITEHEAD, R. **Scaled vehicle electronic stability control.** Relatório de projeto apresentado ao ESV International Collegiate Student Safety Technology Designs Competition. 2005. 8 p.

## APÊNDICE I: LISTAGEM DO PROGRAMA EM MATLAB – MODELO DA DINÂMICA LONGITUDINAL

```

clear all
close all
clc

P = parametros;

T = 30;      %tempo de integração
n = 300;     %número de interações

x0 = [ 0 5 0 0 0 0 5.01/P.r 5.01/P.r ]';

t = 0:(T/n):T;

[t x] = ode45(@equacoes,t,x0);

%escorregamentos

for j=1:n+1
    if x(j,2) == 0
        s(j,1) = 0;
        s(j,2) = 0;
    else
        s(j,1) = (P.r*x(j,7)-x(j,2))/x(j,2);
        s(j,2) = (P.r*x(j,8)-x(j,2))/x(j,2);
    end
end

for j=1:n+1
    N(j,1) = P.Fz(1,:)*[1 ; P.h0-x(j,3); (P.h0-x(j,3)).*x(j,2).^2];
    N(j,2) = P.Fz(2,:)*[1 ; P.h0-x(j,3); (P.h0-x(j,3)).*x(j,2).^2];
end

figure
hold on
scatter(t,3.6*x(:,2),5,x(:,1))
% plot(t,x(:,1)/1000,'LineWidth',2)
% plot(t,3.6*x(:,2),'k--','LineWidth',2)
set(gca,'FontSize',14)
colorbar
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade [km/h]')
legend('Deslocamento [m]')
axis([0 T 0 200])

figure
hold on
plot(t,x(:,3),'LineWidth',2)
plot(t,x(:,4),'k--','LineWidth',2)
set(gca,'FontSize',14)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Deslocamento ou velocidade')
legend('Deslocamento [m]','Velocidade [m/s]')

figure

```

```

hold on
plot(t,180/pi*x(:,5),'LineWidth',2)
plot(t,x(:,6),'k--','LineWidth',2)
set(gca,'FontSize',14)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Ângulo ou velocidade de arfagem')
legend('Ângulo [°]','Velocidade [rad/s]')

figure
hold on
plot(t,x(:,7)*(30/pi),'LineWidth',2)
plot(t,x(:,8)*(30/pi),'k--','LineWidth',2)
set(gca,'FontSize',14)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Rotação [rpm]')
legend('Rodas dianteiras','Rodas traseiras')

figure
hold on
plot(t,s(:,1),'LineWidth',2)
plot(t,s(:,2),'r','LineWidth',2)
set(gca,'FontSize',14)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Escorregamento')
legend('Rodas dianteiras','Rodas traseiras')

figure
hold on
plot(t,N(:,1)/1000,'LineWidth',2)
plot(t,N(:,2)/1000,'r','LineWidth',2)
set(gca,'FontSize',14)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Forças normais [kN]')
legend('Eixo dianteiro','Eixo traseiro')

```

## FUNÇÃO PARÂMETROS

```

function [ P ] = parametros
% PARAMETROS
% Define os parâmetros de entrada para o sistema:
% k1, k2 == rigidez das molas dianteiras e traseiras
% c1, c2 == amortecimento das suspensões dianteira e traseira
% ms == massa suspensa
% mns == massa não suspensa
% a1, a2 == braços
% h0 == altura inicial do CG

P.g = 9.8;           %aceleração da gravidade

P.ms = 1000;         %massa suspensa
P.mns = 200;         %massa não suspensa
P.Iy = 1073;         %inércia a arfagem

P.fn1 = 1.15;        %frequência natural da suspensão dianteira
P.fn2 = 1.2;         %frequência natural da suspensão traseira

P.k1 = (2*pi*P.fn1)^2*P.ms/2;           %fn1 = raiz(k/m)/2*pi
P.k2 = (2*pi*P.fn2)^2*P.ms/2;

```

```

P.c1 = 0.8*sqrt(P.k1*P.ms/2);          %ccrit = 2*raiz(k*m), cideal =
0.4*ccrit
P.c2 = 0.8*sqrt(P.k2*P.ms/2);

%geometria

P.qui = 0.42;          %distribuição de massa
P.l = 2.45;           %entre-eixos
P.h0 = 0.45;          %altura do CG

P.a1 = P.qui*P.l;
P.a2 = (1-P.qui)*P.l;

%características dos pneus e rodas

P.r = 0.26;           %raio dos pneus
P.b = [ 15 0; 0 15 ]; %coeficientes de "atrito"
P.f = 0.08;           %resistência a rolagem
P.Iw = 0.05;

%características aerodinâmicas

P.ro = 1.25;          %densidade do ar
P.Cx = 0.33;          %coeficiente de arrasto
P.A = 1.71;           %área frontal
P.CX = 0.5*P.ro*P.Cx*P.A; %coeficiente global

%forças de reação do solo

P.ax = 7;             %aceleração media

P.Fz = [(0.5*P.mns + P.qui*P.ms)*P.g, -(P.mns + P.ms)*P.ax/(P.a1+P.a2), -
P.CX/(P.a1+P.a2);
(0.5*P.mns + (1-P.qui)*P.ms)*P.g, (P.mns + P.ms)*P.ax/(P.a1+P.a2),
P.CX/(P.a1+P.a2)];

%torques e relações de transmissão

P.T = [80 80];
P.i = 4.19*[3.73 1.96 1.32 0.95 0.76]; %relações de transmissão
P.v = [0 25 55 75 90]/3.6; %velocidades de mudança

```

## FUNÇÃO ENTRADA

```
function [ Tor] = entrada ( vel )
```

```
P = parametros;
```

```
% aceleração com troca de marchas
```

```

if vel>0 && vel<=P.v(2)
    Tor = P.i(1)*P.T;
elseif vel>P.v(2) && vel<=P.v(3)
    Tor = P.i(2)*P.T;
elseif vel>P.v(3) && vel<=P.v(4)
    Tor = P.i(3)*P.T;
elseif vel>P.v(4) && vel<=P.v(5)

```

```

    Tor = P.i(4)*P.T;
else
    Tor = P.i(5)*P.T;
end

```

## FUNÇÃO EQUAÇÕES

```

function [ xdot ] = equacoes( t,x )
% Monta as equações diferenenciais
% x(1) = x
% x(2) = xdot
% x(3) = z
% x(4) = zdot
% x(5) = phi
% x(6) = phidot
% x(7) = tetadot1
% x(8) = tetadot2
% x(9) = x2dot

P = parametros;

% x = [0  1  0  0  0  0  4  4 ];

xdot = [x(2);
        0;
        x(4);
        0;
        x(6);
        0;
        0;
        0];

%normais

N = P.Fz*[1; P.h0-x(3); (P.h0-x(3))*x(2)^2];

Tor = entrada(x(2));

Qx = P.b*[(P.r*x(7)-x(2))/(x(2)+0.01) 0;0 (P.r*x(8)-x(2))/(x(2)+0.0025)]*N;
%forças trativas

My = ([-P.a1 P.a2]*N-[1 1]*Qx*(P.h0+x(3)) - (P.c1*P.a1^2 +
P.c2*P.a2^2)*x(6) ...
      - (P.k1*P.a1^2 + P.k2*P.a2^2)*x(5));
if x(2) == 0
    M1 = 0;
    M2 = 0;
else
    M1 = Tor(1)-[1 0]*(P.b*[(P.r*x(7)-x(2))/(x(2)+0.01) 0;0 (P.r*x(8)-
x(2))/(x(2)+0.0025)]*P.r+P.f*P.r)*N;
    M2 = Tor(2)-[0 1]*(P.b*[(P.r*x(7)-x(2))/(x(2)+0.01) 0;0 (P.r*x(8)-
x(2))/(x(2)+0.0025)]*P.r+P.f*P.r)*N;
end

xdot(2) = 1/(P.ms+P.mns)*([1 1]*Qx - P.CX*x(2)^2);
xdot(4) = 1/(P.ms)*(P.mns*P.g-(P.c1+P.c2)*x(4)-(P.k1+P.k2)*x(3));
xdot(6) = (1/P.Iy)*My;
xdot(7) = (1/P.Iw)*M1;
xdot(8) = (1/P.Iw)*M2;

```

## APÊNDICE II – LISTAGEM DO PROGRAMA EM MATLAB - MODELO NÃO-LINEAR DA DINÂMICA LATERAL

```

clear all
close all
clc
format long

P = param;

% Define os parâmetros de simulação
% tend = tempo final de simulação
% passo = passo de simulação
% N = número de passos (formulação alternativa)

tend = 12;
passo = 0.01;

t = 0:passo:tend;

x0 = input('\nEntre com o vetor de valores iniciais\n\n');
nome = input('\nNome da simulação\n','s');

file = fopen(nome,'wt');
fprintf(file,'*** Registro de simulação ***\nRegistro: Leonardo
Baruffaldi\n\n');
fprintf(file,'Arquivo: rotina1.m\n\n');
fprintf(file,'\nCondições iniciais:\n');
fprintf(file,'u0 = %-6.2f km/h\nv0 = %-6.2f m/s\nr0 = %-6.2f
rad/s\n',3.6*x0(1),x0(2),x0(3));
fprintf(file,'\nParâmetros do veículo:\n');
fprintf(file,'\na1 = %-6.4f m\na2 = %-6.4f m\nb1 = %-6.4f m\nb2 = %-6.4f
m\n',P.a_1,P.a_2,P.b_1,P.b_2);
fprintf(file,'\nTempo de simulação: %3.2f segundos\nPasso: %1.5f
segundo\n',tend,passo);
fprintf(file,'*****\n');
fclose(file);

[t,y] = ode45(@equa,t,x0);

% Determinação do ângulo de guinada

[r,c] = size(t);
teta = zeros(size(t));
for i=1:r-1
    teta(i) = (y(i+1,3)-y(i,3))*passo;
end
teta(i+1)=teta(i);

% Determinação dos ângulos de deriva
alfa(:,1) = (y(:,2)+P.a_1*y(:,3))./(y(:,1)-P.b_1*y(:,3));
alfa(:,2) = (y(:,2)+P.a_1*y(:,3))./(y(:,1)+P.b_2*y(:,3));
alfa(:,3) = (y(:,2)-P.a_2*y(:,3))./(y(:,1)-P.b_1*y(:,3));
alfa(:,4) = (y(:,2)-P.a_2*y(:,3))./(y(:,1)+P.b_2*y(:,3));

figure
hold on
set(gca,'FontSize',14)
plot(t,3.6*y(:,1),'Linewidth',1.5)

```

```

grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade [km/h]')
title('Velocidade longitudinal')

figure
hold on
set(gca, 'FontSize', 14)
plot(t, y(:, 2), 'LineWidth', 1.5)
grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade [m/s]')
title('Velocidade lateral')

figure
hold on
set(gca, 'FontSize', 14)
plot(t, y(:, 3)*180/pi, 'LineWidth', 1.5)
grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade angular [°/s]')
title('Velocidade de guinada')

figure
hold on
set(gca, 'FontSize', 14)
plot(t, 180/pi*teta, 'LineWidth', 1.5)
grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Ângulo [°]')
title('Ângulo de guinada')

figure
hold on
set(gca, 'FontSize', 14)
plot(t, 180/pi*asin(y(:, 2)./y(:, 1)), 'LineWidth', 1.5)
grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Ângulo [°]')
title('Ângulo de escorregamento lateral')

figure
hold on
set(gca, 'FontSize', 14)
plot(t, alfa(:, 1)*180/pi, 'b', 'LineWidth', 1.5)
plot(t, alfa(:, 2)*180/pi, '--g', 'LineWidth', 1.5)
plot(t, alfa(:, 3)*180/pi, 'r', 'LineWidth', 1.5)
plot(t, alfa(:, 4)*180/pi, '--m', 'LineWidth', 1.5)
grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Ângulo')
title('Ângulos de deriva')
legend('Pneu 1', 'Pneu 2', 'Pneu 3', 'Pneu 4')

```

## FUNÇÃO EQUA

```

function [xdot] = equa(t, x)
% Função xdot = eq(t, x, F)
% Define as equações diferenciais que regem o problema
% x(1) = u

```

```

% x(2) = v
% x(3) = r

P = param;

N(1) = P.m*P.g*P.a_2/(P.a_1+P.a_2)*P.b_2/(P.b_1+P.b_2);
N(2) = P.m*P.g*P.a_2/(P.a_1+P.a_2)*P.b_1/(P.b_1+P.b_2);
N(3) = P.m*P.g*P.a_1/(P.a_1+P.a_2)*P.b_2/(P.b_1+P.b_2);
N(4) = P.m*P.g*P.a_1/(P.a_1+P.a_2)*P.b_1/(P.b_1+P.b_2);

F = [0 0 540 540];
if t>=2
    F = [0 0 0 340];
end

xdot = [1/P.m*(sum(F)) - x(3)*x(2) - 1/P.m*P.R_x*x(1)^2 -
1/P.m*sum(N)*P.Rr;
        P.k/P.m*(N(1)*(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)-x(3)*P.b_1) + ...
        N(2)*(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)+x(3)*P.b_2) + ...
        N(3)*(x(2)-x(3)*P.a_2)/(x(1)-x(3)*P.b_1) + ...
        N(4)*(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)+x(3)*P.b_2)) + x(3)*x(1) -
1/P.m*P.R_y*x(2)^2;
        1/P.Iz*(-P.b_1*(F(1)+F(3)-(N(1)+N(3))*P.Rr) + P.b_2*(F(2)+F(4)-
(N(2)+N(4))*P.Rr) + ...
        P.k*(+P.a_1*N(1)*(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)-x(3)*P.b_1) + ...
        P.a_1*N(2)*(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)+x(3)*P.b_2) + ...
        -P.a_2*N(3)*(x(2)-x(3)*P.a_2)/(x(1)-x(3)*P.b_1) + ...
        -P.a_2*N(4)*(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)+x(3)*P.b_2)))]];

```

## FUNÇÃO PARAM

```

function [P] = param
% Função P = param
% Define os parâmetros físicos da simulação
% m - massa
% Iz - momento de inércia de guinada
% C_x, C_y - coeficientes de arrasto aerodinâmico
% A_x - área frontal do veículo
% ro - densidade do ar
% R_x, R_y - fatores de arrasto
% Rr - coeficiente de resistência ao rolamento
% a_1+a_2 - entre eixos
% b_1+b_2 - bitola
% ki - coeficientes de rigidez lateral dos pneus (N/rad)
% R.r - coeficiente de resistência ao rolamento

% Gravidade
P.g = 9.85;

% Inerciais
P.m = 1000;
P.Iz = 1070;

% Resistências
P.C_x = 0.33;
P.C_y = 0.50;
P.A_x = 1.71;
P.ro = 1.225;
P.R_x = 0.5*P.ro*P.C_x*P.A_x;
P.R_y = 0.5*P.ro*P.C_y*P.A_x;

```

```
% Geometria  
P.a_1 = 1.007;  
P.a_2 = 1.483;  
P.b_1 = 0.70;  
P.b_2 = 0.70;
```

```
% Pneu  
P.k1 = -11.5;  
P.k2 = -11.5;  
P.k3 = -11.5;  
P.k4 = -11.5;  
P.k = -11.5;  
P.Rr = 0.08;
```

## APÊNDICE III – LISTAGEM DO PROGRAMA EM MATLAB - MODELO LINEARIZADO DA DINÂMICA LATERAL

```

clear all
close all
clc

P = param;

% Define os parâmetros de simulação
% tend = tempo final de simulação
% passo = passo de simulação
% N = número de passos (formulação alternativa)

tend = 15;
passo = 0.01;

t = 0:passo:tend;

x0 = input('\nEntre com o vetor de valores para a linearização\n\n');
if numel(x0)~=3
    error('O número de elementos do vetor de condições iniciais está incorreto')
end
nome = input('\nNome da simulação\n','s');

file = fopen(nome,'wt');
fprintf(file,'*** Registro de simulação ***\nRegistro: Leonardo Baruffaldi\n\n');
fprintf(file,'Arquivo: rotina1.m\n\n');
fprintf(file,'\nCondições de equilíbrio:\n');
fprintf(file,'u0 = %-6.2f km/h\nv0 = %-6.2f m/s\nr0 = %-6.2f rad/s\n',3.6*x0(1),x0(2),x0(3));
fprintf(file,'\nParâmetros do veículo:\n');
fprintf(file,'\na1 = %-6.4f m\na2 = %-6.4f m\nb1 = %-6.4f m\nb2 = %-6.4f m\n',P.a_1,P.a_2,P.b_1,P.b_2);
fprintf(file,'\nTempo de simulação: %3.2f segundos\nPasso: %1.5f segundo\n',tend,passo);
fprintf(file,'*****\n');
fclose(file);

% Normais
N(1) = P.m*P.a_2/(P.a_1+P.a_2)*P.b_2/(P.b_1+P.b_2);
N(2) = P.m*P.a_2/(P.a_1+P.a_2)*P.b_1/(P.b_1+P.b_2);
N(3) = P.m*P.a_1/(P.a_1+P.a_2)*P.b_2/(P.b_1+P.b_2);
N(4) = P.m*P.a_1/(P.a_1+P.a_2)*P.b_1/(P.b_1+P.b_2);

% Inicialização das matrizes do espaço de estados
A = eye(3,3);
B = [1/P.m 1/P.m 1/P.m 1/P.m;
     0 0 0 0;
     -P.b_1/P.Iz P.b_2/P.Iz -P.b_1/P.Iz P.b_2/P.Iz];
C = eye(size(A));
D = zeros(3,4);

A(1,1) = -2*P.R_x*x0(1)/P.m;
A(1,2) = -x0(3);
A(1,3) = -x0(2);

```

```

% Cálculo dos ângulos de deriva linearizados
dadx_1 = dalfadx(x0,1);
dadx_2 = dalfadx(x0,2);
dadx_3 = dalfadx(x0,3);
dadx_4 = dalfadx(x0,4);
% Fim do cálculo dos ângulos de deriva

A(2,1) = 1/P.m*(P.k1*N(1)*dadx_1(1)+...
    P.k2*N(2)*dadx_2(1)+...
    P.k3*N(3)*dadx_3(1)+...
    P.k4*N(4)*dadx_4(1))+x0(3);
A(2,2) = 1/P.m*(P.k1*N(1)*dadx_1(2)+...
    +P.k2*N(2)*dadx_2(2)+...
    +P.k3*N(3)*dadx_3(2)+...
    +P.k4*N(4)*dadx_4(2)-2*P.R_y*x0(2));
A(2,3) = 1/P.m*(P.k1*N(1)*dadx_1(3)+...
    +P.k2*N(2)*dadx_2(3)+...
    +P.k3*N(3)*dadx_3(3)+...
    +P.k4*N(4)*dadx_4(3))+x0(1);

A(3,1) = 1/P.Iz*(P.a_1*(P.k1*N(1)*dadx_1(1)+...
    P.k2*N(2)*dadx_2(1))+...
    -P.a_2*(P.k3*N(3)*dadx_3(1)+...
    P.k4*N(4)*dadx_4(1)));
A(3,2) = 1/P.Iz*(P.a_1*(P.k1*N(1)*dadx_1(2)+...
    P.k2*N(2)*dadx_2(2))+...
    -P.a_2*(P.k3*N(3)*dadx_3(2)+...
    P.k4*N(4)*dadx_4(2)));
A(3,3) = 1/P.Iz*(P.a_1*(P.k1*N(1)*dadx_1(3)+...
    P.k2*N(2)*dadx_2(3))+...
    -P.a_2*(P.k3*N(3)*dadx_3(3)+...
    P.k4*N(4)*dadx_4(3)));

% Montagem do sistema linear no espaço de estados
carro = ss(A,B,C,D);

% Verificação dos pólos, zeros e da estabilidade do sistema
figure
hold on
h = pzplot(carro);
prop = getoptions(h);
prop.Title.String = 'Pólos e Zeros';
prop.Title.FontSize = 12;
prop.XLabel.String = 'Eixo Real';
prop.XLabel.FontSize = 12;
prop.YLabel.String = 'Eixo Imaginário';
prop.YLabel.FontSize = 12;
prop.Grid = 'on';
setoptions(h,prop)

clc

% Vetor de tempo
t_final = 12;
passo = 0.01;
t=0:passo:t_final;

% Reorganiza as matrizes
TMP = A;
A(2,:) = TMP(3,:);
A(3,:) = TMP(2,:);

```

```

TMP = A;
A(:,2) = TMP(:,3);
A(:,3) = TMP(:,2);
TMP = B;
B(2,:) = TMP(3,:);
B(3,:) = TMP(2,:);
clear TMP
C(3,:) = [0 0 1];

% Monta o espaço de estados
carro = ss(A,B,C,D);

% Freqüências e amortecimentos
[Wn, Z] = damp(carro);
dp = [Wn Z];
file=fopen(nome,'at');
fprintf(file, '\nPólos e amortecimentos:\n');
fprintf(file, '\nFrequência\tAmortecimento\n');
fprintf(file, '%-4.6f\t%-4.6f\n', dp');
fclose(file);

u = entradas(t);

% Resposta a degrau unitário
[y,t,x]= lsim(carro,u,t);

% Projeto de controlador por alocação de pólos
polos = [-2.5; -3.2+0.5i; -3.2-0.5i];
[K,prec,mess] = place(A,B,polos);
AA = A-B*K;

carro_ap = ss(AA,B,C,D);

[y,t,xap] = lsim(carro_ap,u,t);

% Análise dos sobres sinais
sobre = zeros(3,1);
for i=1:3
    sobre(i) = (max(abs(xap(:,i))) - abs(xap(end,i)))/abs(xap(end,i));
end

file=fopen(nome,'at');
fprintf(file, '\n\nMáximos sobre sinais:\n');
fprintf(file, '\nVelocidade longitudinal:\t%2.4f',sobre(1));
fprintf(file, '\nVelocidade lateral:\t\t%2.4f',sobre(3));
fprintf(file, '\nVelocidade de guinada:\t\t%2.4f\n',sobre(2));
fclose(file);

% Análise do observador
p_obs = -15;

[Ko, Abb, Aab] = observador(A,B,C,D,p_obs,t);
Kb = K(1:4,3);

AA = [A-B*K, B*Kb; zeros(1,3), Abb-Ko*Aab];
BB = [B;zeros(1,4)];
CC = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 -1; 0 0 0 0];
DD = zeros(4,4);

carro_obs = ss(AA,BB,CC,DD);

```

```

[yltil,t,xob] = lsim(carro_obs,u,t,[0 0 0 3]);

% Gráficos
figure
set(gca,'FontSize',14)
subplot(2,1,1)
plot(t,xob(:,4),'LineWidth',1.5)
grid
ylabel('Erro [m/s]')
title('Erro de estimativa da velocidade lateral')
subplot(2,1,2)
hold on
plot(t,xob(:,3),'LineWidth',1.5)
plot(t,yltil(:,3),'r--','LineWidth',1.5)
grid
ylabel('Vel. lateral [m/s]')
xlabel('Tempo [s]')
legend('Valor real','Valor estimado')

figure
set(gca,'FontSize',14)
subplot(3,1,1)
hold on
plot(t,xap(:,1)*3.6,'LineWidth',1.5)
plot(t,x(:,1)*3.6,'r--','LineWidth',1.5)
plot(t,xob(:,1)*3.6,'g:', 'LineWidth',1.5)
ylabel('Vel. long. [km/h]')
grid
title('Resposta controlada a degrau na roda 4')
subplot(3,1,2)
hold on
plot(t,xap(:,3),'LineWidth',1.5)
plot(t,x(:,3),'r--','LineWidth',1.5)
plot(t,xob(:,3),'g:', 'LineWidth',1.5)
ylabel('Vel. lateral [m/s]')
grid
subplot(3,1,3)
hold on
plot(t,xap(:,2)*90/pi,'LineWidth',1.5)
plot(t,x(:,2)*90/pi,'r--','LineWidth',1.5)
plot(t,xob(:,2)*90/pi,'g:', 'LineWidth',1.5)
legend('Com controle','Sem controle','Com controle e observador')
ylabel('Vel. de guinada [°/s]')
grid
xlabel('Tempo [s]')

forca = zeros(numel(t),4);
for i = 1:numel(t)
    forca(i,:) = (-K*xap(i,1:3))';
end
% forca = forca + u;

figure
subplot(2,1,1)
hold on
set(gca,'FontSize',14)
plot(t,forca(:,1),'b--','LineWidth',1.5)
plot(t,forca(:,2),'m','LineWidth',1.5)
plot(t,forca(:,3),'r','LineWidth',1.5)
plot(t,forca(:,4),'g:', 'LineWidth',1.5)
grid

```

```

legend('Roda 1','Roda 2','Roda 3','Roda 4')
ylabel('Newton [N]')
title('Evolução das forças nos pneus')
subplot(2,1,2)
hold on
set(gca,'FontSize',14)
plot(t,u(:,1),'b--','LineWidth',1.5)
plot(t,u(:,2),'m','LineWidth',1.5)
plot(t,u(:,3),'r','LineWidth',1.5)
plot(t,u(:,4),'g:','LineWidth',1.5)
grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Newton [N]')
title('Entrada')

```

## FUNÇÃO DALFADX

```

function [derivadas] = dalfadx(x,roda)
% Função dalfadx(x)
% Calcula as derivadas parciais dos ângulos de deriva dos pneus

P = param;

if roda==1
    derivadas(1) = -(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)-x(3)*P.b_1)^2;
    derivadas(2) = 1/(x(1)-x(3)*P.b_1);
    derivadas(3) = (P.b_1*(x(2)+x(3)*P.a_1)+P.a_1*(x(1)-x(3)*P.b_1))/(x(1)-
x(3)*P.b_1)^2;
end

if roda==2
    derivadas(1) = -(x(2)+x(3)*P.a_1)/(x(1)+x(3)*P.b_2)^2;
    derivadas(2) = 1/(x(1)+x(3)*P.b_2);
    derivadas(3) = (-
P.b_2*(x(2)+x(3)*P.a_1)+P.a_1*(x(1)+x(3)*P.b_2))/(x(1)+x(3)*P.b_2)^2;
end

if roda==3
    derivadas(1) = -(x(2)-x(3)*P.a_2)/(x(1)-x(3)*P.b_1)^2;
    derivadas(2) = 1/(x(1)-x(3)*P.b_1);
    derivadas(3) = (P.b_1*(x(2)-x(3)*P.a_2)-P.a_2*(x(1)-x(3)*P.b_1))/(x(1)-
x(3)*P.b_1)^2;
end

if roda==4
    derivadas(1) = -(x(2)-x(3)*P.a_2)/(x(1)+x(3)*P.b_2)^2;
    derivadas(2) = 1/(x(1)+x(3)*P.b_2);
    derivadas(3) = (-P.b_2*(x(2)-x(3)*P.a_2)-
P.a_2*(x(1)+x(3)*P.b_2))/(x(1)+x(3)*P.b_2)^2;
end

```